IL MESTIERE DEL MATEMATICO

Maria Luisa Spreafico
maria.spreafico@unimi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI SCIENZE AGRARIE E AMBIENTALI - PRODUZIONE, TERRITORIO, AGROENERGIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Piano Nazionale Lauree Scientifiche
CIRD Centro Interdipartimentale di Ricerca Didattica

IN QUESTO LABORATORIO

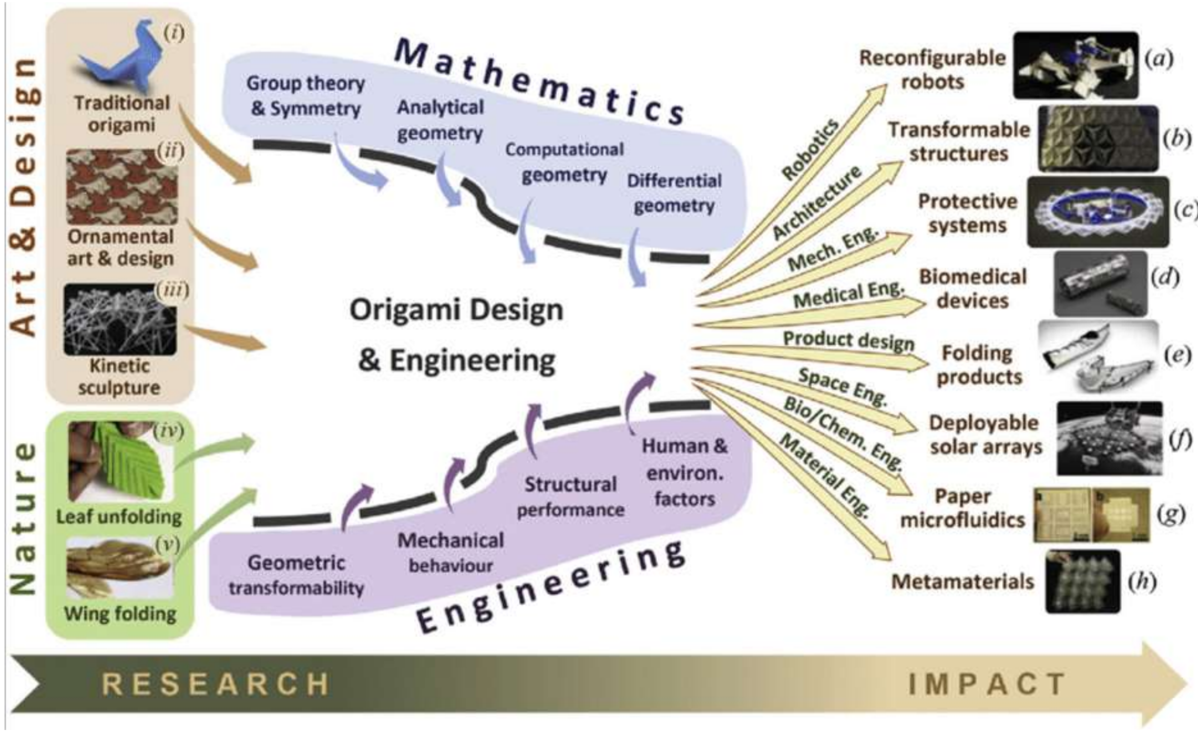
Scopi:

- scoprire qualche semplice teorema **attuale** (lavorando con esempi tangibili)
- (necessità di) utilizzare il linguaggio matematico
- congetturare e analizzare la logica degli enunciati

Mezzo: studiare un problema che ha queste caratteristiche.

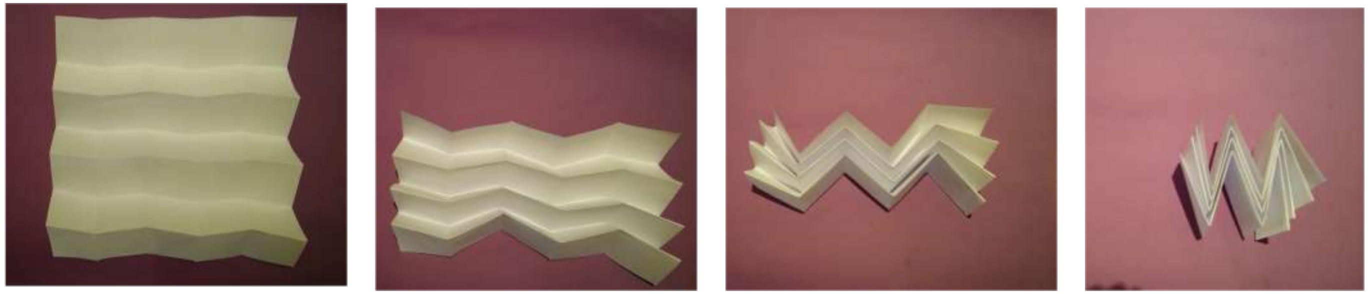
- sconosciuto agli studenti
- con molti aspetti applicativi
- con qualche risultato intuitivo
- con risultati interessanti per le loro molteplici strutture logico-matematiche

ORIGAMI E APPLICAZIONI

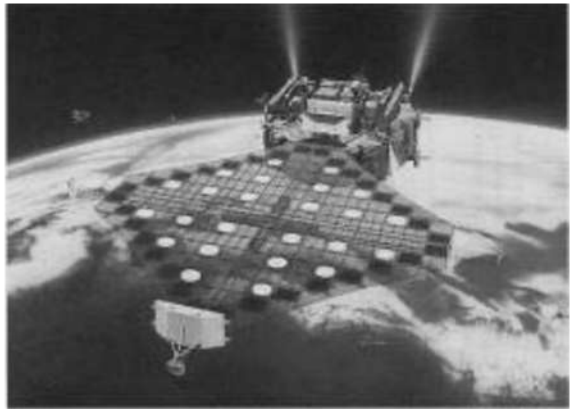


https://www.researchgate.net/figure/An-overview-of-Origami-Design-Engineering-representing-sources-of-inspiration_fig1_335307935

ORIGAMI PIATTI E INGEGNERIA SPAZIALE (1)



Mappa di Koryo
Miura
Miura-ori ’80

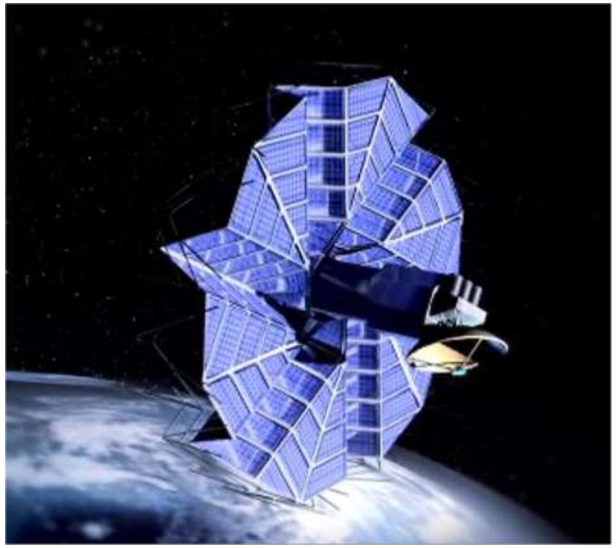


http://www.herngyi.com/blog/6ose

ORIGAMI PIATTI E INGEGNERIA SPAZIALE (1)

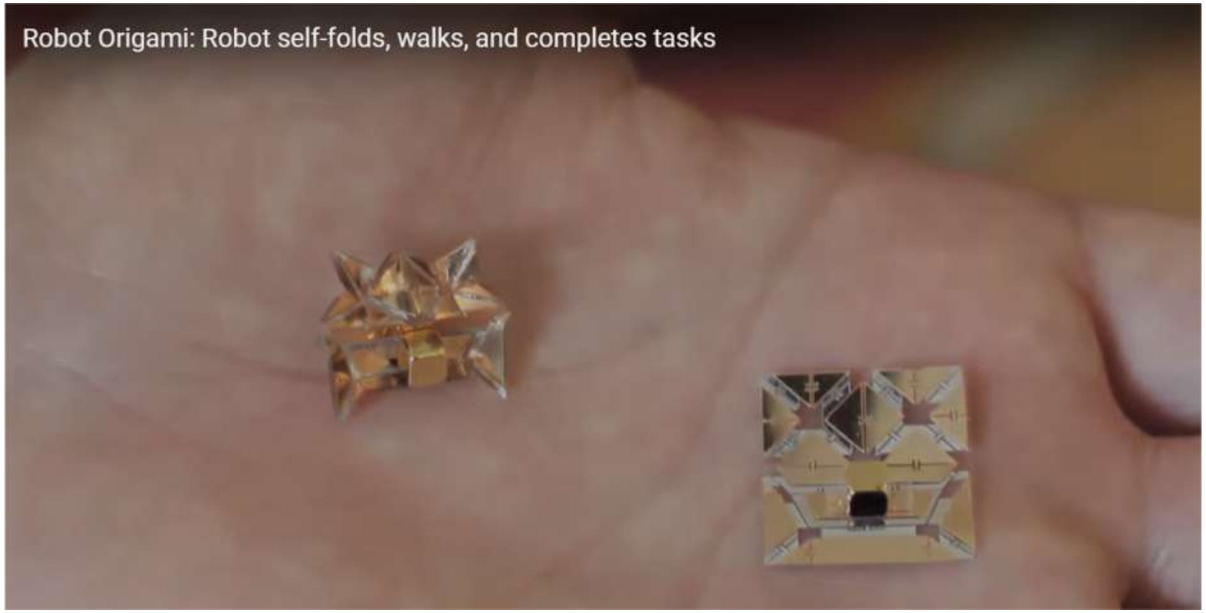
Origami in Space: BYU-designed solar arrays inspired by origami

https://www.youtube.com/watch?v=ZVYz7g-qLjs



Brigham Young University
NASA Jet Propulsion Laboratory

ORIGAMI PIATTI E INGEGNERIA BIOMEDICA (1)

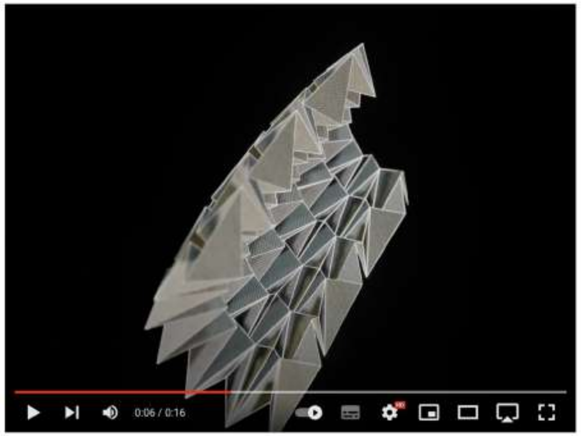


Robot Origami: Robot self-folds, walks, and completes tasks

https://www.youtube.com/watch?v=ZVYz7g-qLjs&t=80s

ORIGAMI PIATTI E INGEGNERIA BIOMEDICA (2)

Stent di
You-Kuribayashi



Waterbomb Origami Pattern Rendered Simulation

https://www.youtube.com/watch?v=L2DwKaizbXw

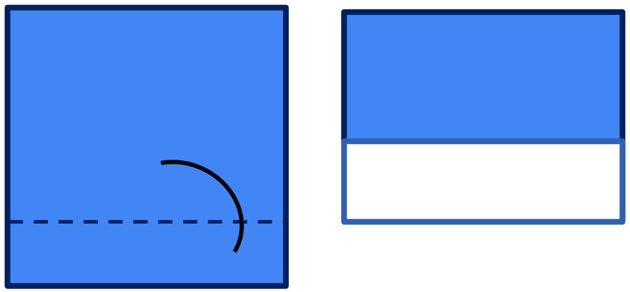
Origami Bistable Stent

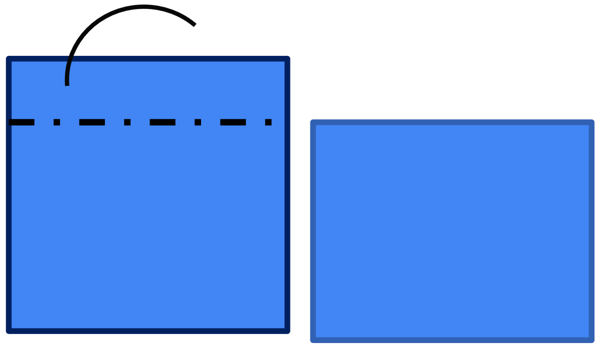
https://www.youtube.com/watch?v=be2kGnGBy5g

NOTAZIONI (per capirci)

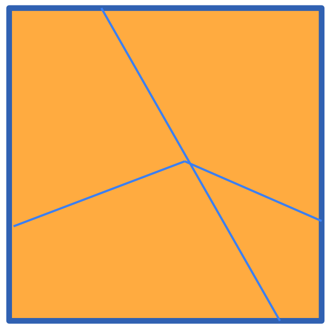
1) **Origami piatto:** si può trasportare in un libro senza rovinarlo e senza aggiungere nuove pieghe.

2) Piega a monte, piega a valle

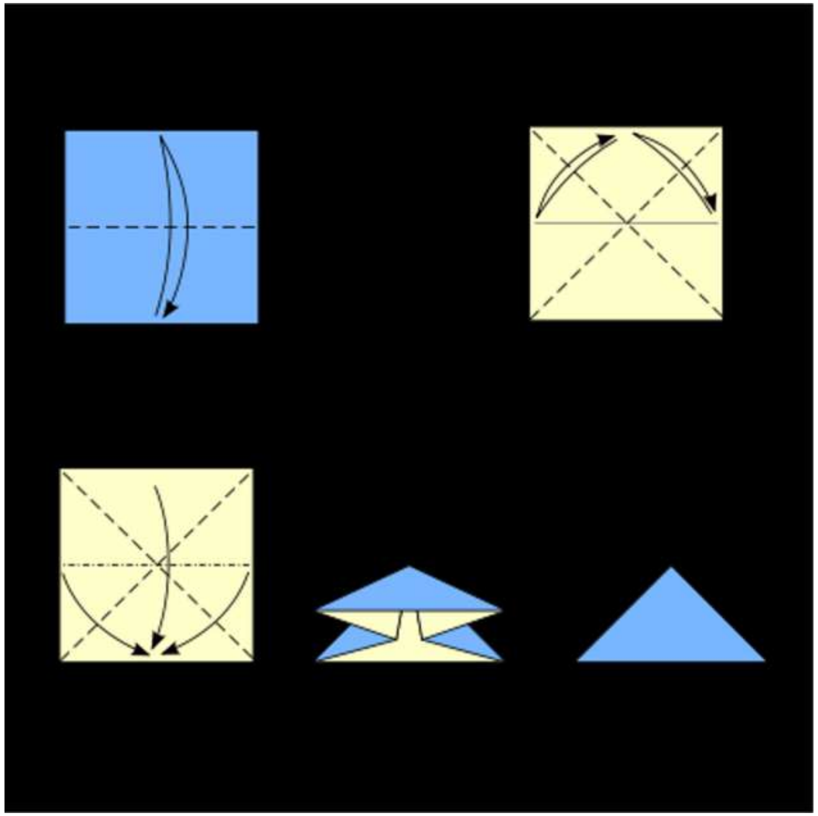




3) Vertice: punto interno nel quale concorrono almeno due pieghe.



LA BASE TRIANGOLARE



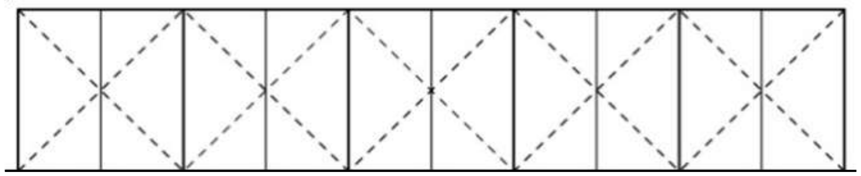
Per iniziare:
costruiamo tre basi di un colore e tra di un altro.

LA BASE TRIANGOLARE e IL «TESSUTO PIATTO»

1) Come «incollare» i pezzi di uno stesso colore per ottenere una striscia?

LA BASE TRIANGOLARE e IL «TESSUTO PIATTO»

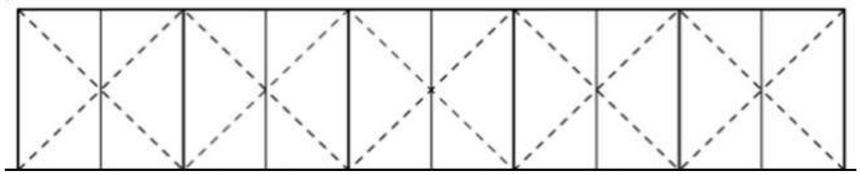
1) Come «incollare» i pezzi di uno stesso colore per ottenere una striscia?



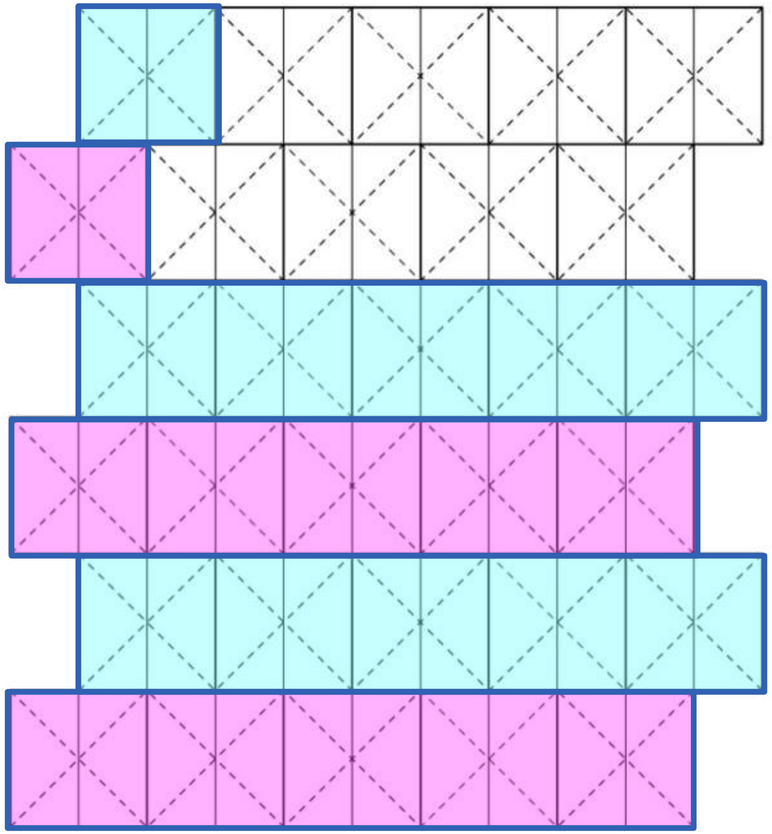
2) Come «incollare» tra loro due strisce di colore diverso?

LA BASE TRIANGOLARE e IL «TESSUTO PIATTO»

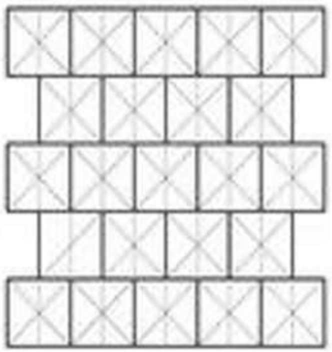
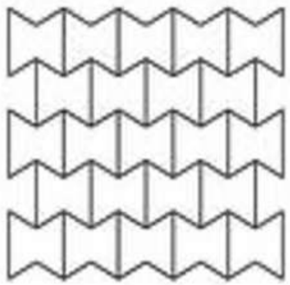
1) Come «incollare» i pezzi di uno stesso colore per ottenere una striscia?



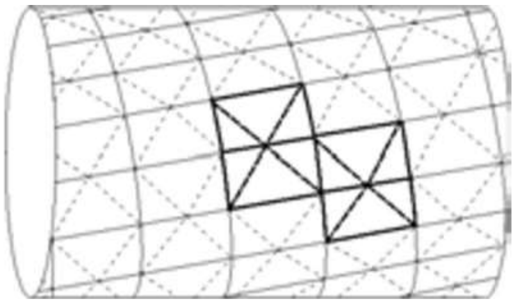
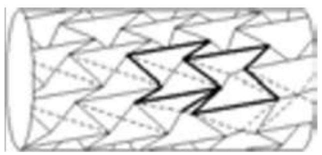
2) Come «incollare» tra loro due strisce di colore diverso?



LA BASE TRIANGOLARE, IL «TESSUTO PIATTO» e LO STENT

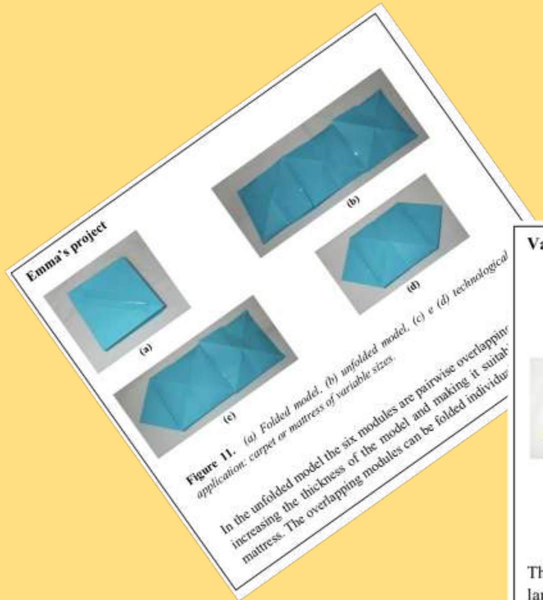


SIAMO TUTTI INGEGNERI

Cosa possiamo pensare di costruire con questo tipo di tessuto?

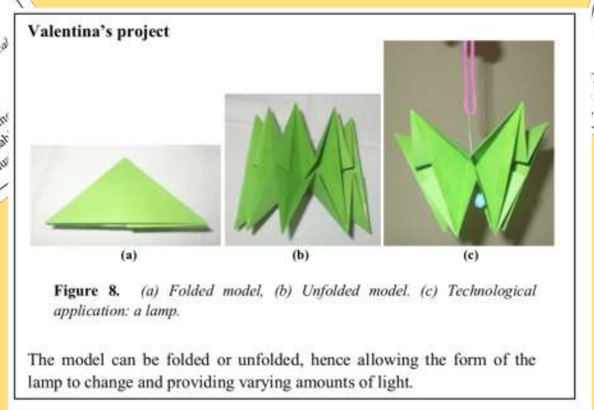
Lasciamo spazio alla fantasia e alle nuove idee: chiedete di produrre prototipi!


Emma's project

(a) (b) (c) (d)

Figure 11. *(a) Folded model, (b) unfolded model, (c) e (d) technological application: carpet or mattress of variable sizes.*

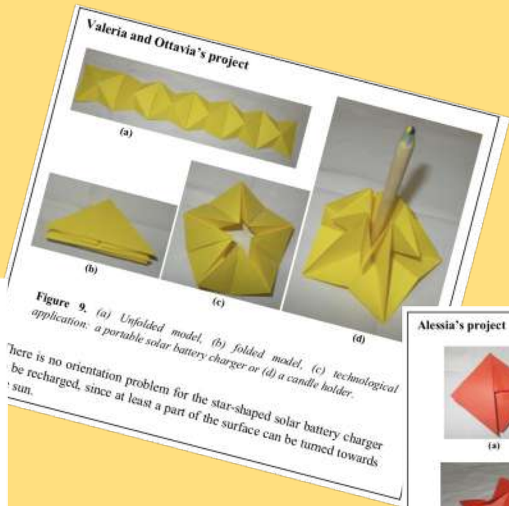
In the unfolded model the six modules are pairwise overlappin increasing the thickness of the model and making it suitabl mattress. The overlapping modules can be folded individu


Valentina's project

(a) (b) (c)

Figure 8. *(a) Folded model, (b) Unfolded model. (c) Technological application: a lamp.*

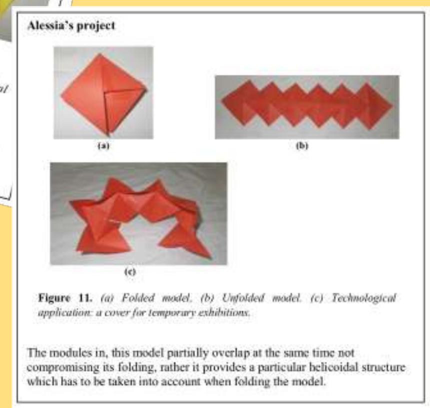
The model can be folded or unfolded, hence allowing the form of the lamp to change and providing varying amounts of light.


Valeria and Ottavia's project

(a) (b) (c) (d)

Figure 9. *(a) Unfolded model, (b) folded model, (c) technological application: a portable solar battery charger or (d) a candle holder.*

here is no orientation problem for the star-shaped solar battery charger be recharged, since at least a part of the surface can be turned towards sun.


Alessia's project

(a) (b) (c)

Figure 11. *(a) Folded model, (b) Unfolded model. (c) Technological application: a cover for temporary exhibitions.*

The modules in, this model partially overlap at the same time not compromising its folding, rather it provides a particular helicoidal structure which has to be taken into account when folding the model.

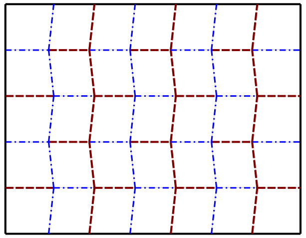
FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Quando un origami è piatto?
Cerchiamo le condizioni legate alla piattezza. Restringiamo il problema.

Nessun vertice interno: si piega sempre piatto.

Un vertice interno: **?**
(problema locale)

Più di un vertice interno: **?** (problema globale; mappa di Miura)

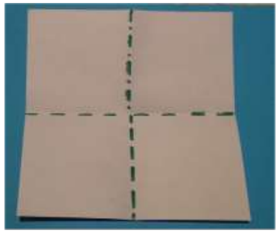


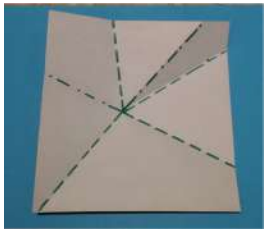
FORMULAZIONE DELLE CONGETTURE (numero di pieghe)

SPERIMENTAZIONE 1.

Numerosità delle pieghe uscenti da un vertice: confronto tra il *numero* di pieghe a monte (M) e quello delle pieghe a valle (V).

Contate le pieghe che arrivano in uno dei vertici del vostro tessuto o di altri modelli che potete piegare.
Quante a monte? Quante a valle?

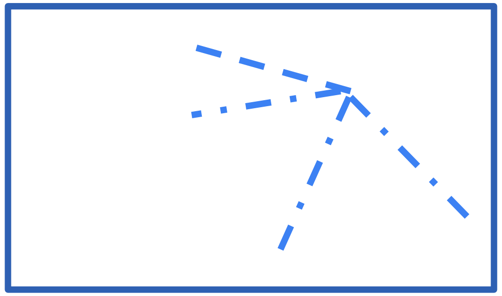




Suggerimento:

Per ottenere una piegatura piatta in un vertice, ci si può aiutare disegnando un punto interno (vertice) e facendo poi partire da esso pieghe a monte e valle (non necessariamente a 180º).

Nella figura un esempio generico con 4 pieghe.



FORMULAZIONE DELLE CONGETTURE (numero di pieghe)

Raccogliamo in una tabella il numero di pieghe. monte e valle dei nostri modelli (distribuire ai gruppi anche modelli già piegati)

M	V

Cosa si può osservare?

TEOREMI DI PIATTEZZA sul numero di pieghe

Teorema 1: Se l'origami è piatto allora la somma del numero delle pieghe a Monte con quello delle pieghe a Valle è sempre un numero pari ($M + V = 2h,\ h \in \mathbb{N}$)

Teorema 2 (Maekawa – Justin): Se l'origami è piatto allora la differenza delle pieghe a Monte e di quelle a Valle è 2 o -2.

***Osservazioni (secondo grado)*:**

1) Le condizioni $M+V=2h$ e $|M-V|=2$ sono necessarie per la piattezza

$$\text{piatto} \Rightarrow |M-V|=2$$

2) **Domanda:** c'è una relazione tra i due enunciati?

TEOREMI DI PIATTEZZA sul numero di pieghe

Teorema 1: Se l'origami è piatto allora la somma del numero delle pieghe a Monte con quello delle pieghe a valle è sempre un numero pari
$(M + V = 2h, h \in N)$

Teorema 2 (Maekawa – Justin): Se l'origami è piatto allora la differenza delle pieghe a Monte e di quelle a Valle è 2 o -2.

***Osservazioni (secondo grado)*:**

2) **Domanda:** c'è una relazione tra i due enunciati?

Teo 1 è un **corollario** di Teo 2.

Infatti |M-V|=2 implica M= V ± 2; quindi M+V= V + V ± 2 = 2V ± 2 che è pari.

TEOREMI DI PIATTEZZA sul numero di pieghe

~~**Teorema 1:** Se l'origami è piatto allora la somma del numero~~ delle pieghe a Monte con quello delle pieghe a valle è sempre un numero pari
$(M + V = 2h,\ h \in N)$

Teorema 2 (Maekawa – Justin): Se l'origami è piatto allora la differenza delle pieghe a Monte e di quelle a Valle è 2 o -2.

***Osservazioni (secondo grado)*:**

3) Le condizioni sono necessarie.

Domanda: Sono anche sufficienti ? (cioè: $|M-V|=2$ $\Rightarrow$ piatto ?)
O è vero e si dimostra, oppure si dà un controesempio.

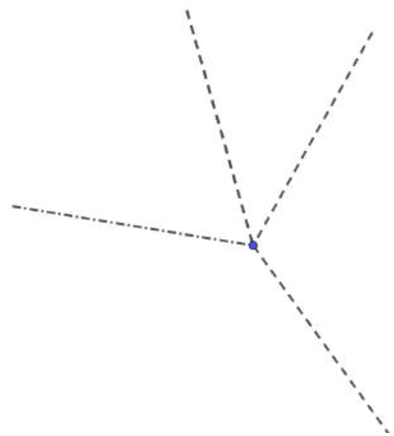
TEOREMI DI PIATTEZZA sul numero di pieghe

Teorema 1: Se l'origami è piatto allora la somma del numero delle pieghe a Monte con quello delle pieghe a valle è sempre un numero pari
$(M + V = 2h,\ h \in N)$

Teorema 2 (Maekawa – Justin): Se l'origami è piatto allora la differenza delle pieghe a Monte e di quelle a Valle è 2 o -2.

***Osservazioni (secondo grado)*:**

3) Le condizioni sono necessarie ma non sufficienti!   Controesempio:



FORMULAZIONE DELLE CONGETTURE (angoli)

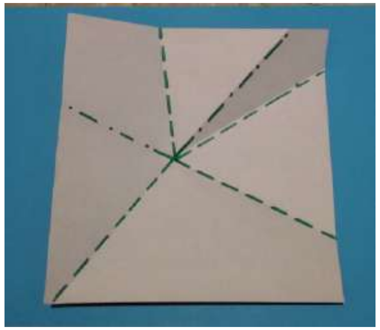
La piattezza dell'origami è in qualche modo legata alla misura degli angoli formati dalle pieghe?

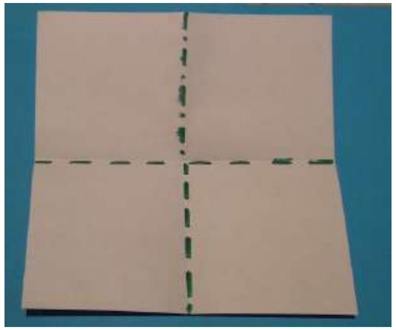
SPERIMENTAZIONE 2.

Angoli uscenti da un vertice: osservare e misura (per es. con goniometro o **tagliando**)

Suggerimento:

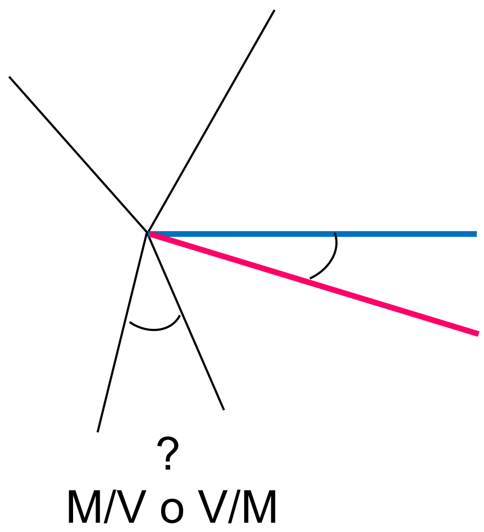
Come in precedenza…sperimenta!





TEOREMI DI PIATTEZZA sugli angoli

Teorema 3 (Big-Little-Big angle): se l'origami è piatto e un angolo è compreso tra due strettamente più grandi, allora i suoi lati sono una piega a monte e una a valle.



Non risolve comunque il problema di assegnare M/V

TEOREMI DI PIATTEZZA sugli angoli

Teorema 4: se l'origami si può piegare piatto allora

$$\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n-1} = \theta_2 + \theta_4 + \cdots + \theta_{2n}$$

Teorema 5: se l'origami si può piegare piatto allora

$$\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n-1} = 180°$$

Teorema 6: se l'origami si può piegare piatto allora

$$\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \cdots + \theta_{2n-1} - \theta_{2n} = 0^{\circ}$$

Osservazioni:

1) SI dimostra facilmente l'equivalenza dei tre enunciati. ***Enunciati equivalenti.***

TEOREMI DI PIATTEZZA sugli angoli

Teorema 4: se $\mathrm{l'origami\ si\ può\ piegare\ piatto\ allora}$

$$\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n-1} = \theta_2 + \theta_4 + \cdots + \theta_{2n}$$

Teorema 5: $\mathrm{se\ l'origami\ si\ può\ piegare\ piatto\ allora}$

$$\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n-1} = 180°$$

Teorema 6: $\mathrm{se\ l'origami\ si\ può\ piegare\ piatto\ allora}$

$$\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \cdots + \theta_{2n-1} - \theta_{2n} = 0^{\circ}$$

Osservazioni:

2) Il Teorema 3 è stato enunciato così da alcuni studenti

Se $\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n-1} \neq \theta_2 + \theta_4 + \cdots + \theta_{2n}$ allora l'origami non è piatto. ***Proposizione contronominale.***

TEOREMI DI PIATTEZZA sugli angoli

Si può dimostrare che le condizioni sugli angoli sono anche sufficienti a garantire la piattezza.
I Teoremi enunciati sono *condizioni necessarie e sufficienti*; hanno cioè questa struttura:

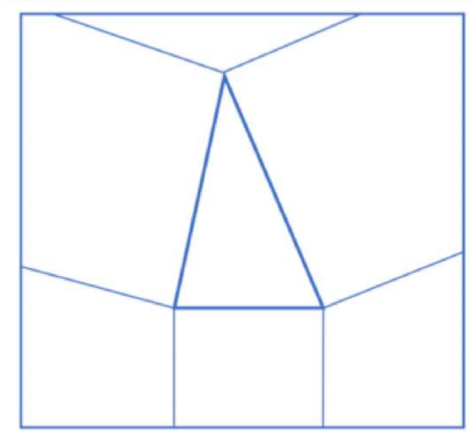
Piatto $\Leftrightarrow$ condizioni angoli

Teorema 4: l'origami si può piegare piatto **se e solo se** $\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n-1} = \theta_2 + \theta_4 + \cdots + \theta_{2n}$
(analogamente per Teorema 5 e 6)

Attenzione: questa CNS garantisce l'esistenza di una scelta di pieghe *M* e *V* perché il modello venga piatto, ma NON garantisce l'unicità e non è costruttiva.

RISULTATI LOCALI E GLOBALI

Attenzione! I risultati precedenti hanno un **carattere locale**: riguardano la piattezza in un vertice.



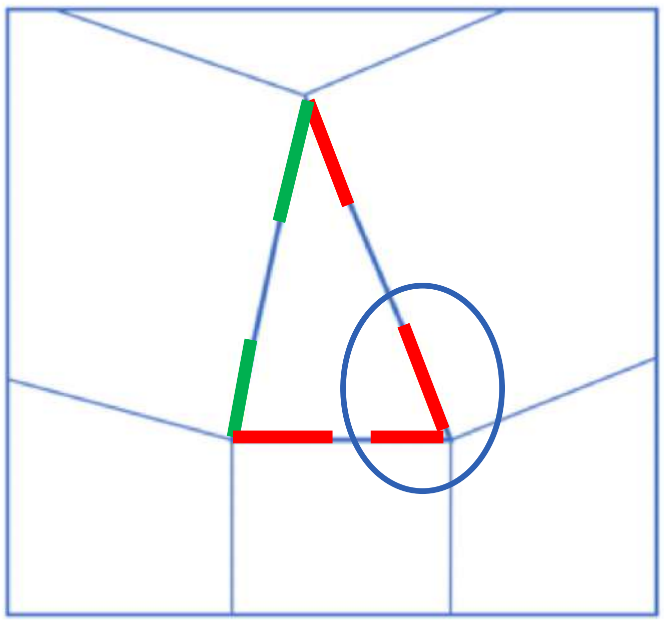
Problema: esiste un’assegnazione M/V che permetta di piegare piatto il CP rappresentato?

Costruzione: triangolo acutangolo + 6 linee costruite Perpendicolarmente al lato su cui poggiano

Mostriamo che, **in ogni vertice vale la CNS,**
Domanda: il CP si può piegare piatto?

RISULTATI LOCALI E GLOBALI

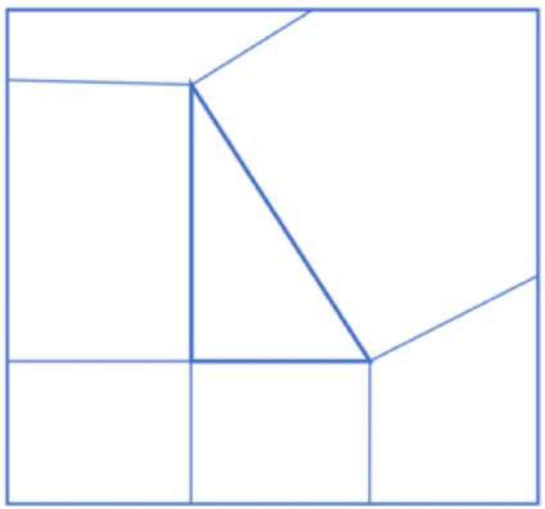
Attenzione! I risultati precedenti hanno un carattere locale: riguardano la piattezza in un vertice.

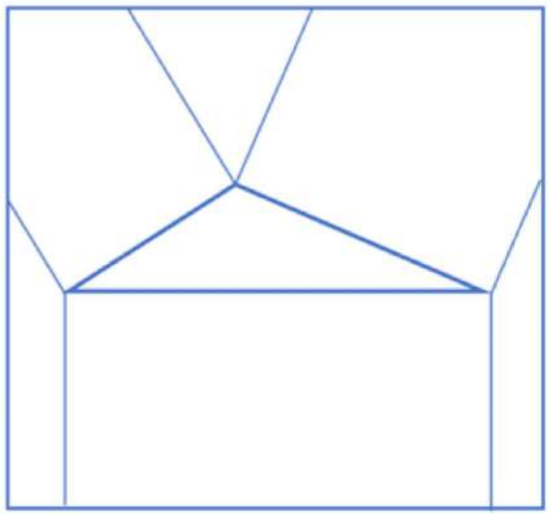


Non riusciamo a soddisfare il
Teorema 3 (Big-Little-Big angle):
se un angolo è compreso tra due più grandi e l'origami è piatto vicino al vertice allora un suo lato si piega a monte e l'altro a valle.

RISULTATI LOCALI E GLOBALI

Cosa si può dire invece di questi CP?





CONCLUSIONI E CONSIGLI DI LETTURA E NAVIGAZIONE

Abbiamo:
- giocato a fare i matematici formulando congetture e scoperendo CN e CNS (con formulazioni equivalenti)
- prodotto hands-on controesempi
- parlato di dimostrazioni costruttive e di problemi di unicità di soluzioni
- parlato di condizioni locali e globali

Hull T., Project Origami, A.K. Peters, Massachusset 2012

O’Rourke J., How to fold it, Cambridge Univ. Press, 2011

http://www.origami-cdo.it/
https://www.origami-resource-center.com
http://www.langorigami.com/
http://mars.wne.edu/~thull/origamimath.html

ALCUNE OSSERVAZIONI

- Si può anche solo svolgere il laboratorio fino a trovare le condizioni sulla numerosità di pieghe monte/valle.

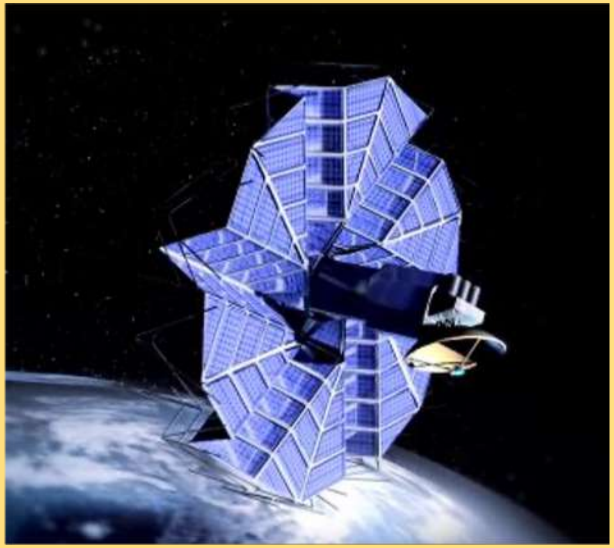
- La relazione sugli angoli può anche essere proposta al primo grado, senza la discussione sulla struttura dell’enunciato.

- Se si vuole iniziare ad utilizzare l’origami nella didattica, le applicazioni in tecnologia possono essere proposte per coinvolgere la classe

- Le slide a sfondo giallo possono essere utilizzate per ulteriori attività/approfondimenti

LA LENTE SOLARE

Si può fare piegare il modello semplificato di una vera lente solare. La piegatura richiede però un po' di tempo.



LA LENTE SOLARE

Per piegare con più facilità il CP della lente si può procedere in questo modo:
1. Piegare a valle i lati dell’esagono e i loro prolungamenti (linee tratteggiate; una delle sei pieghe è indicata in fucsia in figura 1)
2. Piegare a monte le linee continue (una terza di pieghe è indicata in fucsia in figura 2).
3. Concludere piegando le ultime linee a valle (linee tratteggiate, una delle 6 pieghe in fucsia in figura 3). Quest’ultima operazione è resa naturale dalle piegature precedenti.

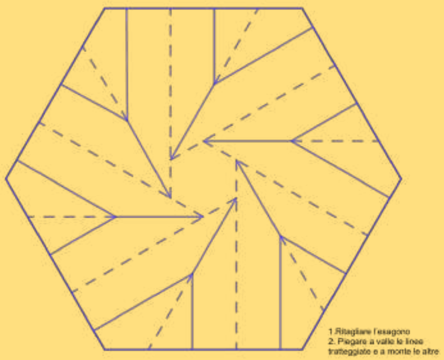


Figura 0

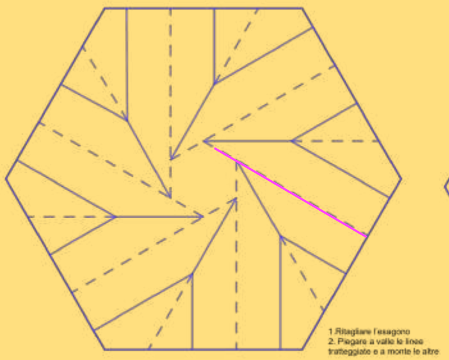


Figura 1

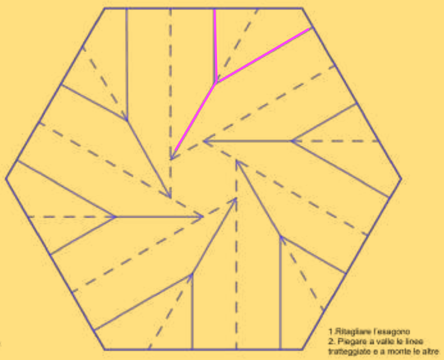


Figura 2

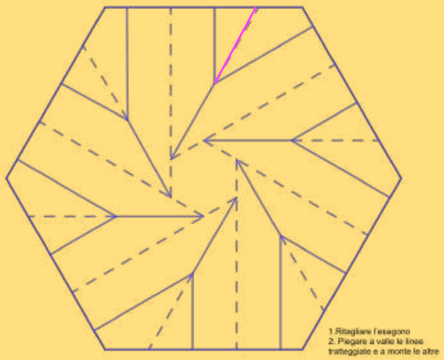


Figura 3

ORIGAMI À LA CARTE

- Triangolo in piega (e educazione civica).

Materiale: 1 o 2 fogli A4 (o A5) per studente; forbici.

- Una casetta in coordinate per polinomi

Materiale: 1 foglio rettangolare, 1 foglio a A4 a quadretti, 1 foglio A4 bianco per studente; matite colorate.

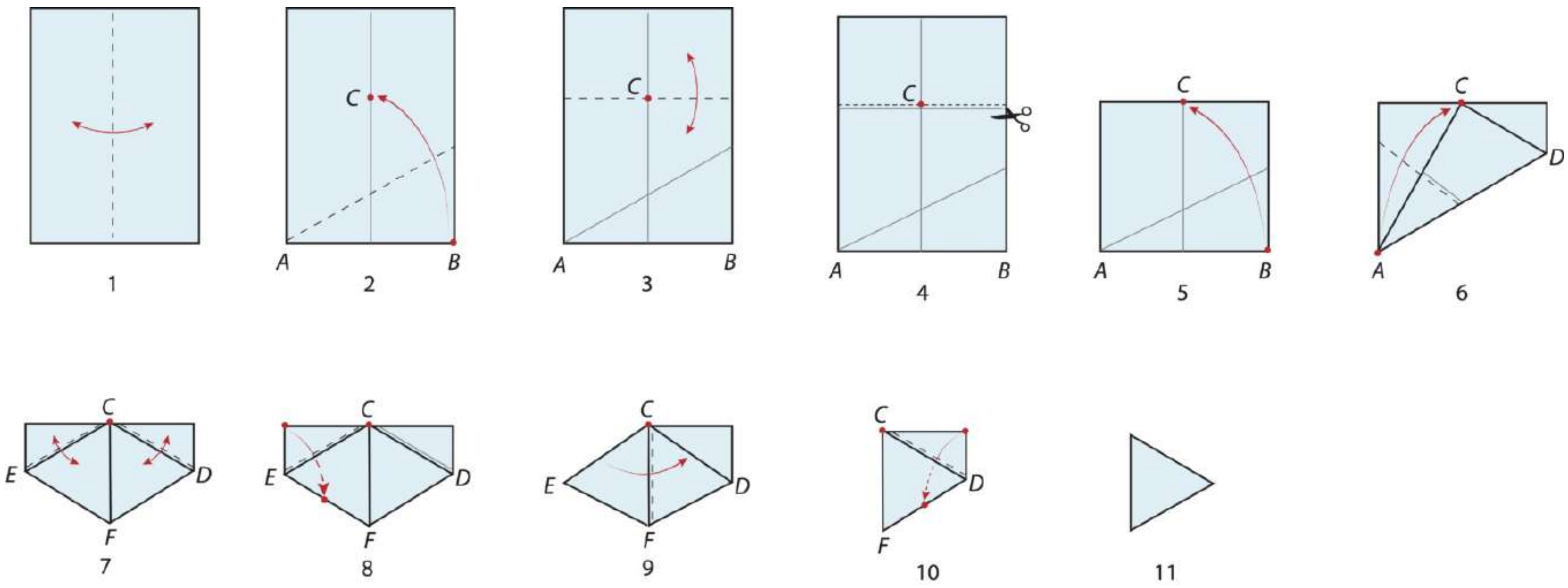
- Angoli in piega

Materiale: 1 foglio kami 15x15 per studente; ½ foglio A4 per studente (tagliato lungo la diagonale).

- Un limite per tutti!

Materiale: 1 striscia di carta per studente.

TRIANGOLO IN PIEGA



TRIANGOLO IN PIEGA

Il triangolo piegato è equilatero.

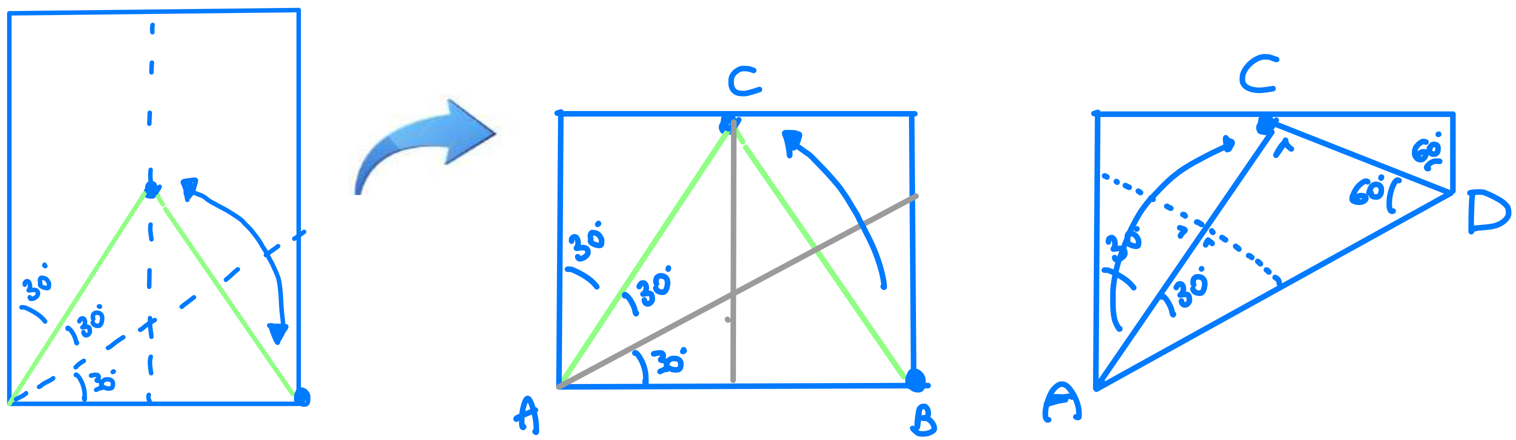
Per il **primo grado** può bastare mostrare che ha tre assi di simetria, piegando!

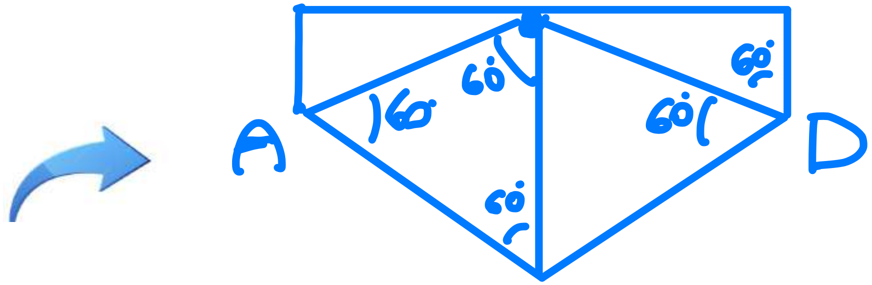
Per il **secondo grado** si può chiedere una giustificazione che passa dall'osservazione sul significato delle pieghe. Occorre far piegare un altro triangolo.

Si può descrivere ogni passaggio o lavorare sul CP e ricercare solo le informazioni necessarie.

TRIANGOLO IN PIEGA

Alcuni spunti (ma trovate il vostro modo!)





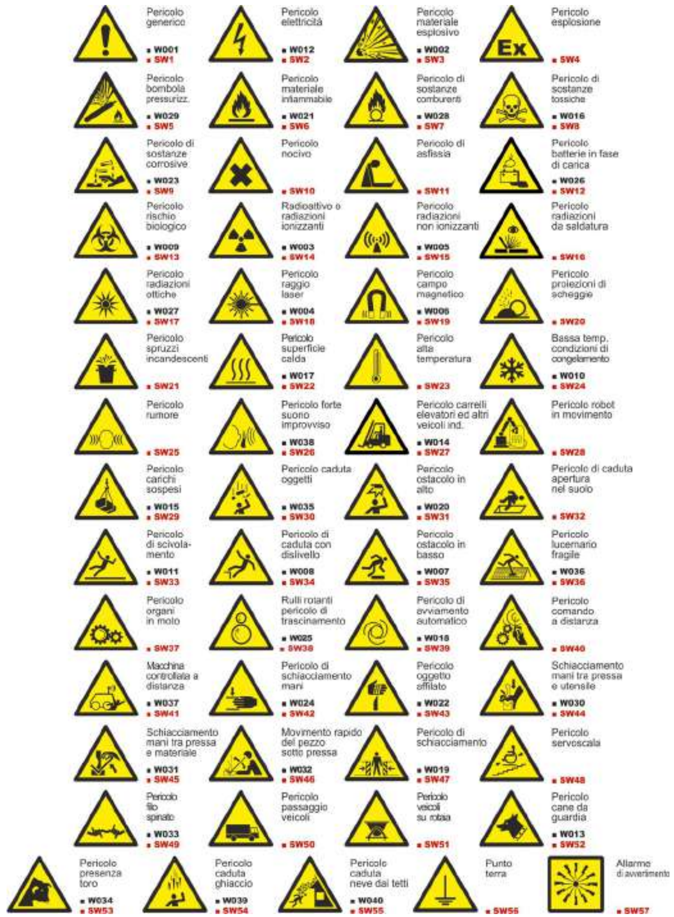
= ingrandimento

TRIANGOLO E PERICOLI

Un’idea in più:

- Classificare cartelli di pericolo in base al numero di assi di simmetria
(cartelli stradali o di perciolo sul lavoro)

- Creare un cartello di pericolo



UNA CASETTA

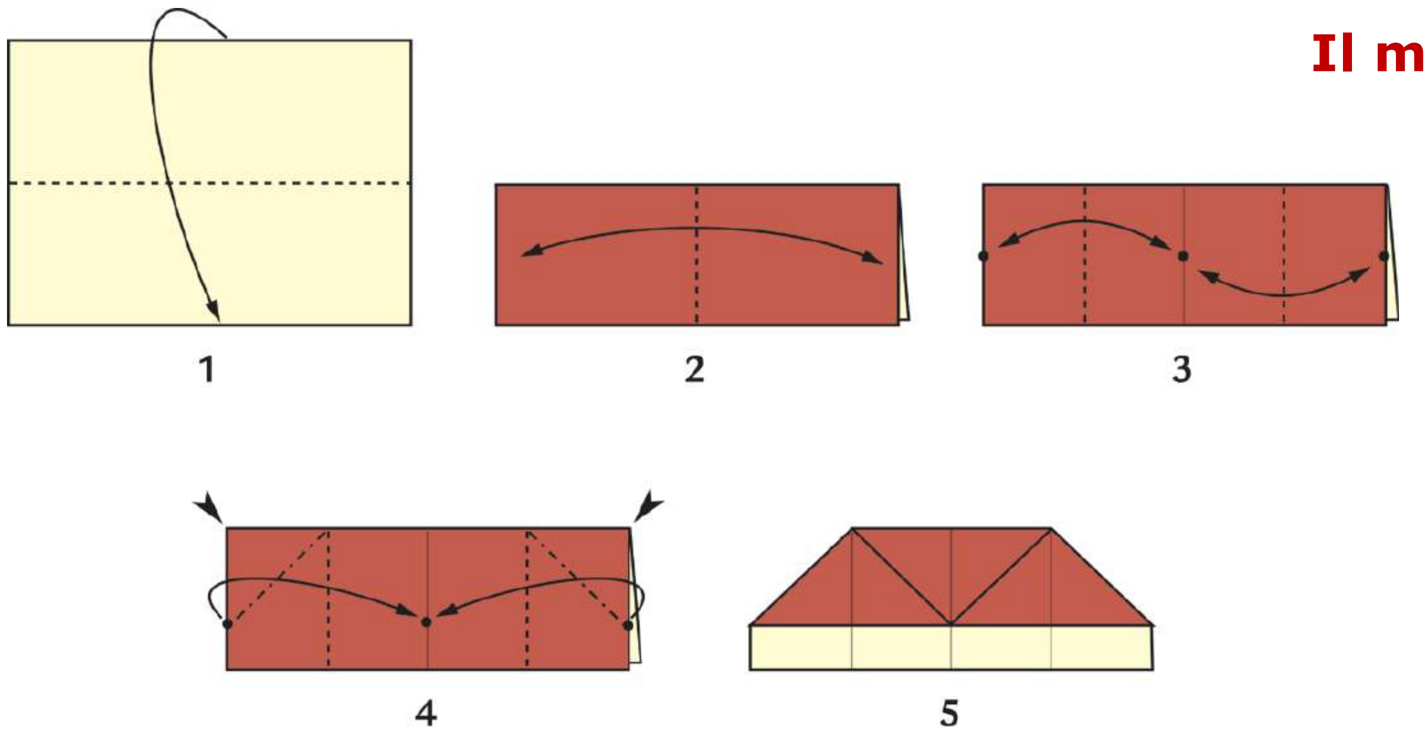
Impareremo a piegare una casetta e mostreremo come utilizzarla per due diverse attività:

- Un lavoro di consolidamento sul piano cartesiano
(in questo caso consiglio di partire da rettangoli 20x15 cm, per facilitare l’individuazione delle coordinate dei punti, senza renderle banali. Potete pensare anche ad altri misure per semplificare ulteriormente i conti).

- Un laboratorio per mostrare l’uso dei polinomi (si parte da carta A4 o A5)

UNA CASETTA

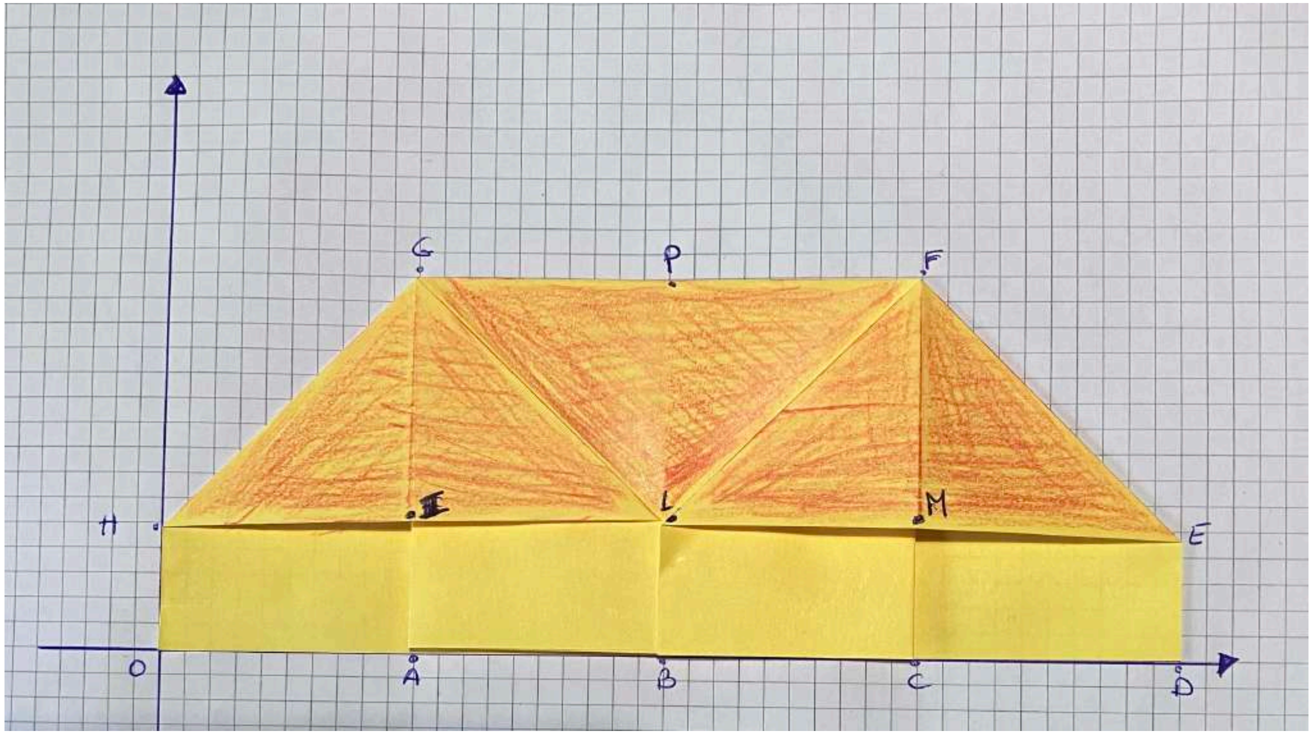
Il modello



Da https://blog.matematica.deascuola.it/articoli/polinomi-di-carta-origami

UNA CASETTA in coordinate

Il modello nel piano cartesiano

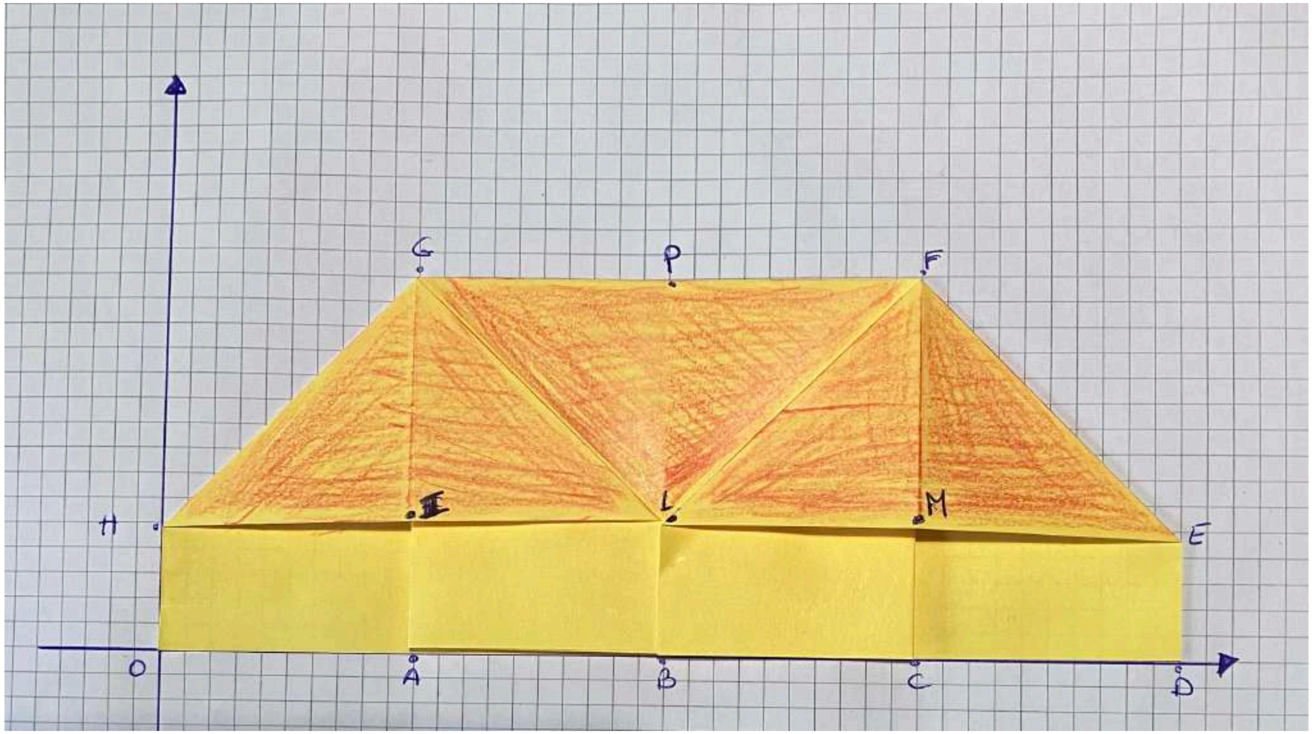


Calcolo delle coordinate dei punti:

Interessante l’ordinata di H,I,L, M (osservare bene le pieghe)

UNA CASETT in coordinate

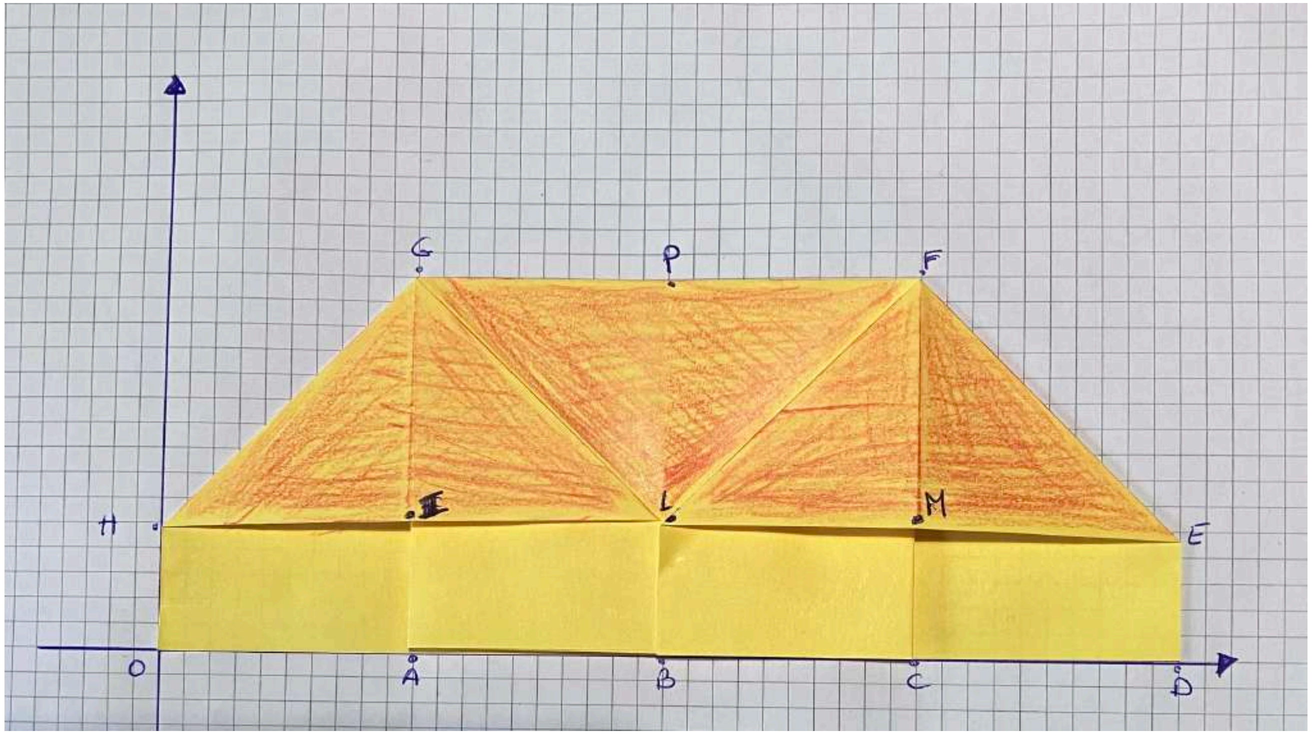
Il modello nel piano cartesiano



Calcolo delle rette parallele agli assi

UNA CASETTA in coordinate

Il modello nel piano cartesiano

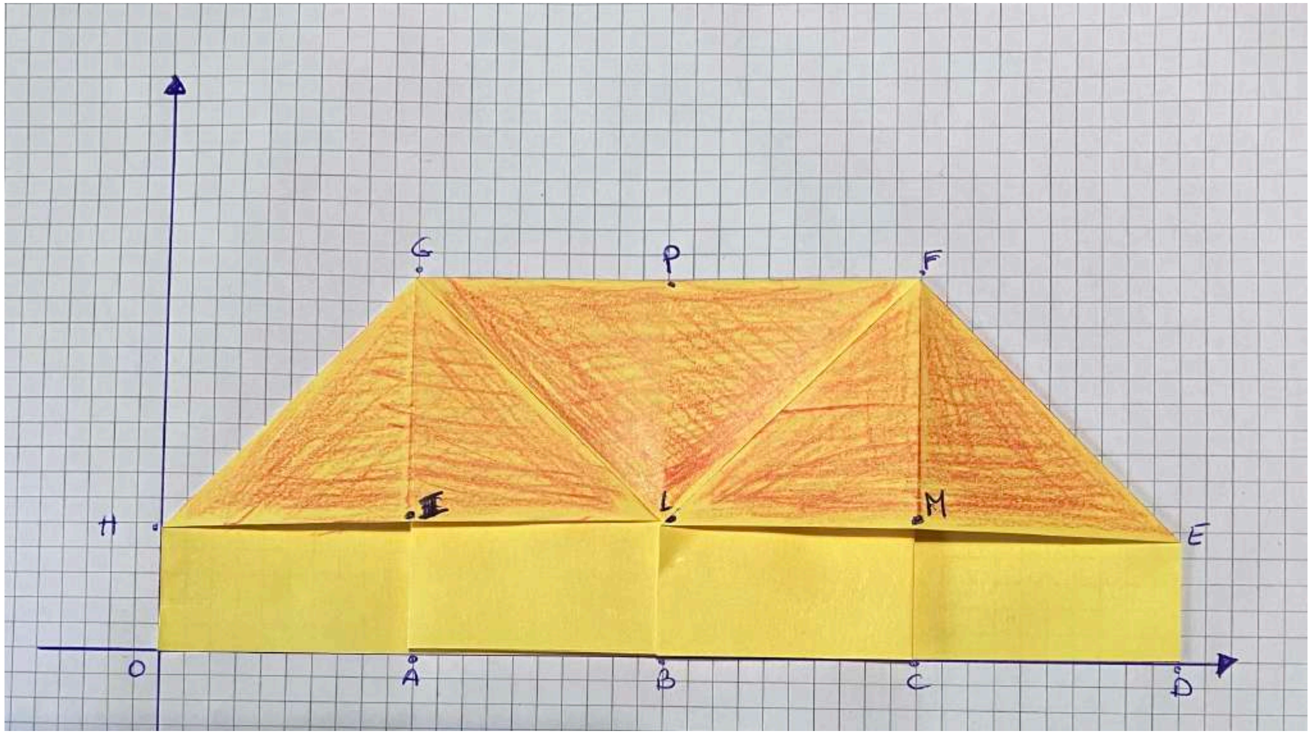


Calcolo delle rette passanti per

- O,I
- G,H
- L, F

UNA CASETTA in coordinate

Il modello nel piano cartesiano



- Calcolo delle aree del tetto rosso e del muro giallo

- controllo di paralelismo e perpendicolarità

UNA CASETTA per polinomi

Definizione. Un monomio è un'espressione letterale in cui compaiono soltanto moltiplicazione fra numeri e potenze di lettere con numeri naturali per esponenti.

Definizione. Un polinomio è una somma algebrica di monomi.

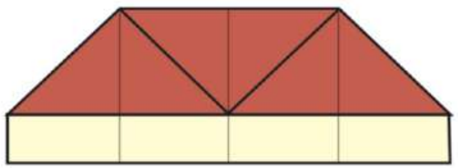
Pieghiamo la carta scrivendo alcune proprietà geometriche finali tramite un polinomio (in 2 o 1 variabile).

Usiamo il polinomio come funzione per dedurre alcune misure (e pieghiamo per controllare)

Usiamo il polinomio per generare un'equazione per progettare

Modello: casetta da foglio A4

Per avere polinomi in una variabile, lavorare con carta quadrata

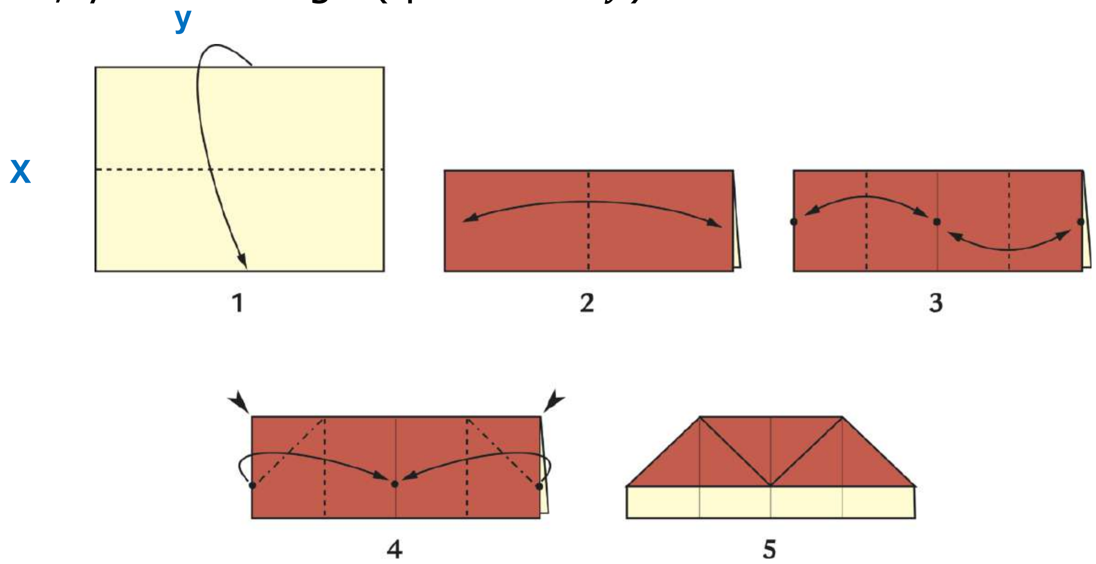


UNA CASETTA di polinomi

Polinomi (funzioni ed equazioni)

Durante la piegatura, discutiamo le relazioni che devono intercorre tra le misure dei lati del rettangolo di partenza, perché il modello possa essere piegato.

Poniamo x= lato corto; y= lato lungo (quindi $x \leq y$)



UNA CASETTA di polinomi

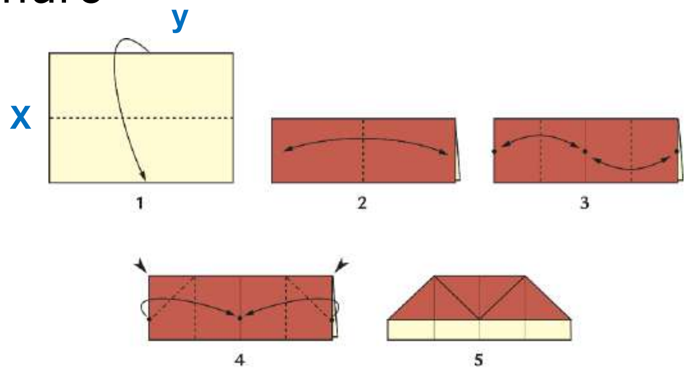
Polinomi (funzioni ed equazioni)

Condizioni che devono soddisfare x, y perché venga una casetta:

Passaggio 4: $\frac{1}{4}y < \frac{1}{2}x$, cioè $\frac{1}{2}y < x$ (quindi $\frac{1}{2}y < x \leq y$)

Attività 1

1) Scrivere l'espressione dell'area del tetto e del muro



UNA CASETTA di polinomi

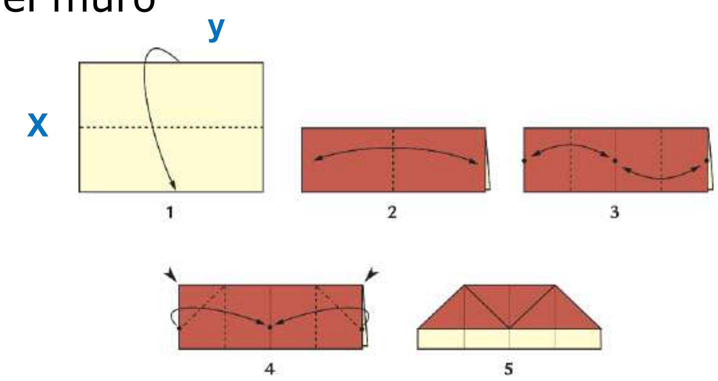
Polinomi (funzioni ed equazioni)

Condizioni che devono soddisfare x, y:

Passaggio 4: $\frac{1}{4}y < \frac{1}{2}x$, cioè $\frac{1}{2}y < x$ (quindi $\frac{1}{2}y < x \leq y$)

Attività 1

1) Scrivere l'espressione dell'area del tetto e del muro



Area$_{\text{tetto}}$ = $\frac{\left(y+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{4}\right)}{2} = \frac{3}{16}y^2$

Area$_{\text{muro}}$ = $y\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) = \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{4}$

grado dei polinomi?

UNA CASETTA di polinomi

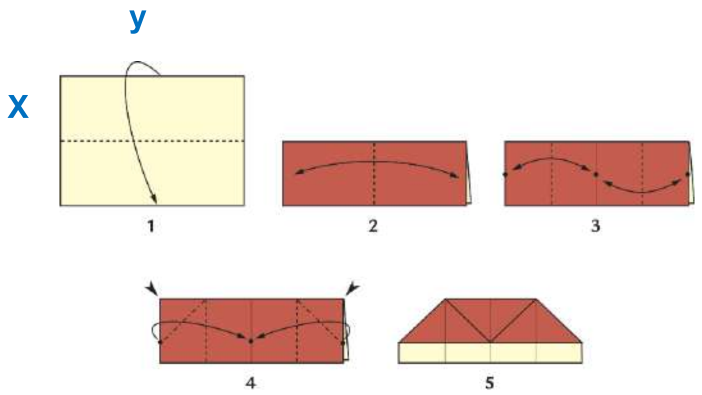
Polinomi (funzioni ed equazioni)

Area$_{\text{tetto}}$ = $\frac{3}{16}y^2$ Area$_{\text{muro}}$ = $\frac{\text{xy}}{2} - \frac{\text{y}^2}{4}$ con $\frac{1}{2}y < x \leq y$

Attività 2 e 3:

2) Prevedere le misure finali partendo da
x= 21 cm y= 29 cm
x= y = 21 cm (o 15 cm)

3) Controllare le previsioni piegando la carta



UNA CASETTA di polinomi

Polinomi (funzioni ed equazioni)

$\text{Area}_{\text{tetto}} = \frac{\left(y+\frac{y}{2}\right)y}{4} : 2 = \frac{3}{16}y^2$ $\quad \text{Area}_{\text{muro}} = y\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) = \frac{\text{xy}}{2} - \frac{\text{y}^2}{4}$ con $\frac{1}{2}y < x \leq y$

Attività 4:

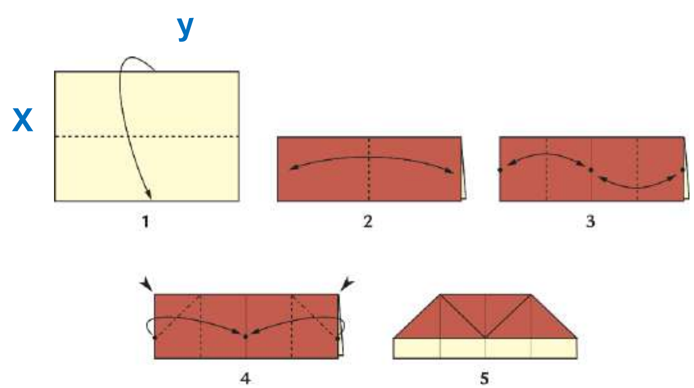
4) Da che foglio devo partire per avere una certa area di tetto e/o di muro?

Per esempio:

-tetto di 300 cm^2 ?

-tetto di 300 cm^2 e muro di 200 cm^2 ?

Attenzione alla discussione su x, y e loro limitazioni!



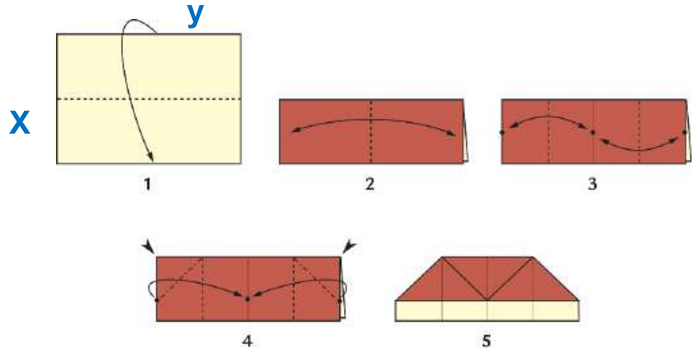
UNA CASETTA di polinomi

Polinomi (funzioni ed equazioni)

Area$_{tetto}$ = $\dfrac{\left(y+\frac{y}{2}\right)y}{4} : 2 = \dfrac{3}{16}y^2$ Area$_{muro}$ = $y\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right) = \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{4}$ con $\frac{1}{2}y < x \leq y$

Attività 4:

4) Da che foglio devo partire per avere una certa area di tetto e/o di muro?



Per esempio:

-tetto di 300 cm^2 ?

$\frac{3}{16}y^2$=300 (anche alle medie…quadrati perfetti)

-tetto di 300 cm^2 e muro di 200 cm^2 ?

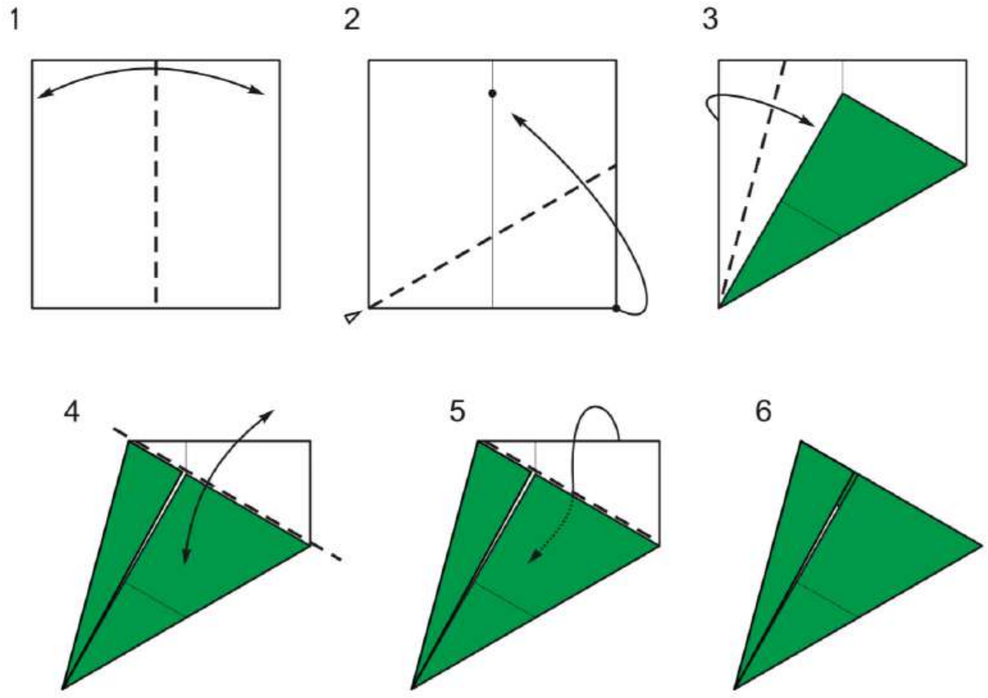
$\frac{3}{16}y^2$=300 e $\frac{xy}{2} - \frac{y^2}{4}$ =200 anche alle medie.. Eq. primo grado)

Attenzione alla discussione su x, y e loro limitazioni!

ANGOLI IN PIEGA (goniometro)

Il Goniometro

Vantaggi del goniometro che presenteremo:
È più semplice da utilizzare
Rende l'angolo tangibile
È uno strumento prodotto dallo studente



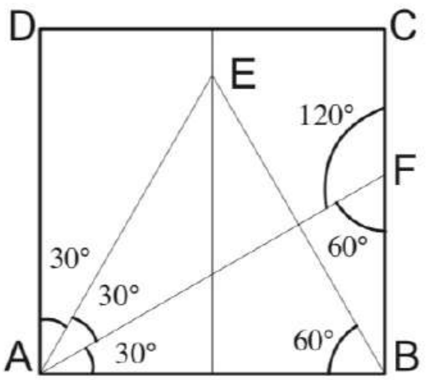
Vediamo ora il diagramma
che commentiamo piega per piega

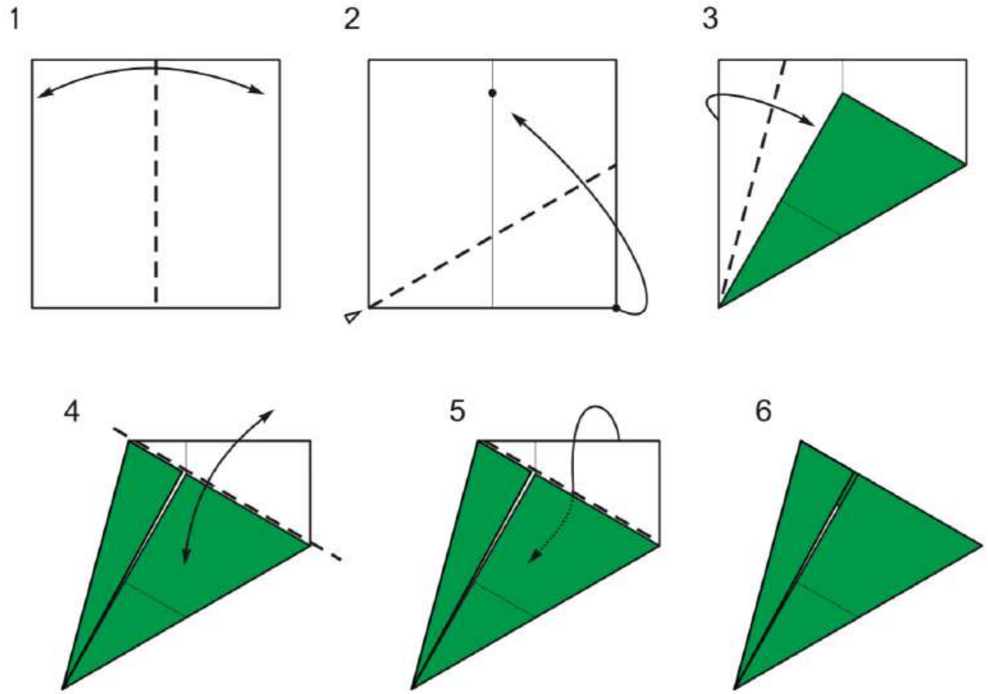
ANGOLI IN PIEGA (goniometro)

Il Goniometro

Osservazioni durante i passaggi di piegat

Dopo passaggio 2:
completare con la misura degli angoli

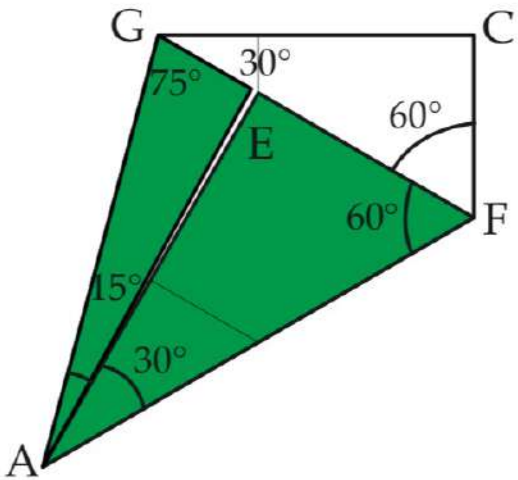


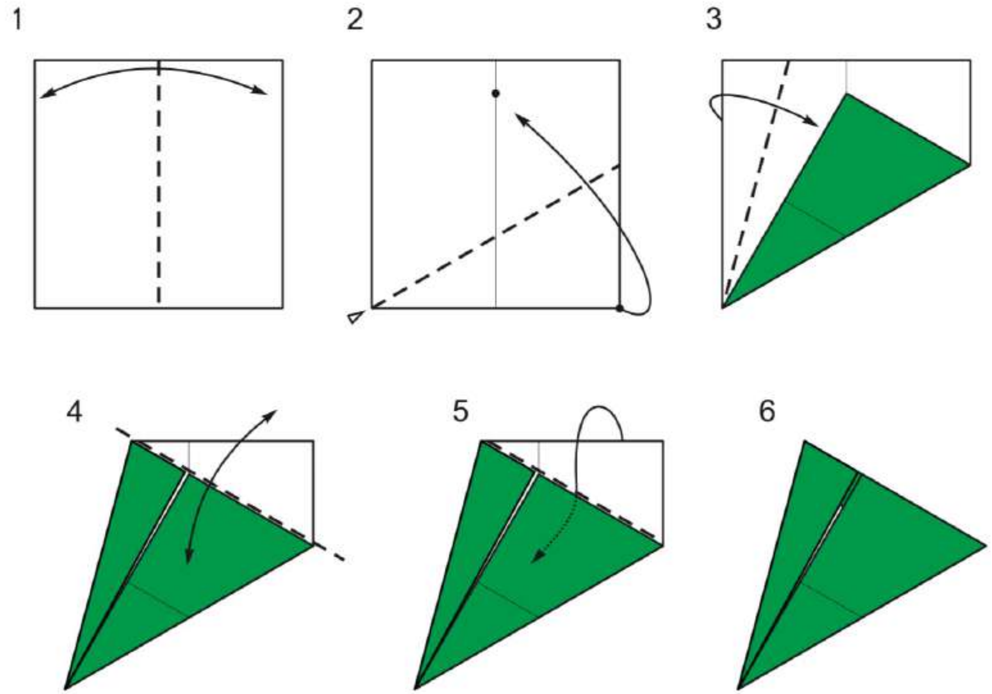


ANGOLI IN PIEGA (goniometro)

Il Goniometro

Prima di eseguire la piega del passaggio 4 completare la misura degli angoli





ANGOLI IN PIEGA (trigonometria)

Formula di duplicazione del seno

$$\sin(2\beta) = 2\sin(\beta)\cos(\beta)$$

Possiamo supporre: $0 \leq 2\beta \leq 2\pi$, ovvero $0 \leq \beta \leq \pi$

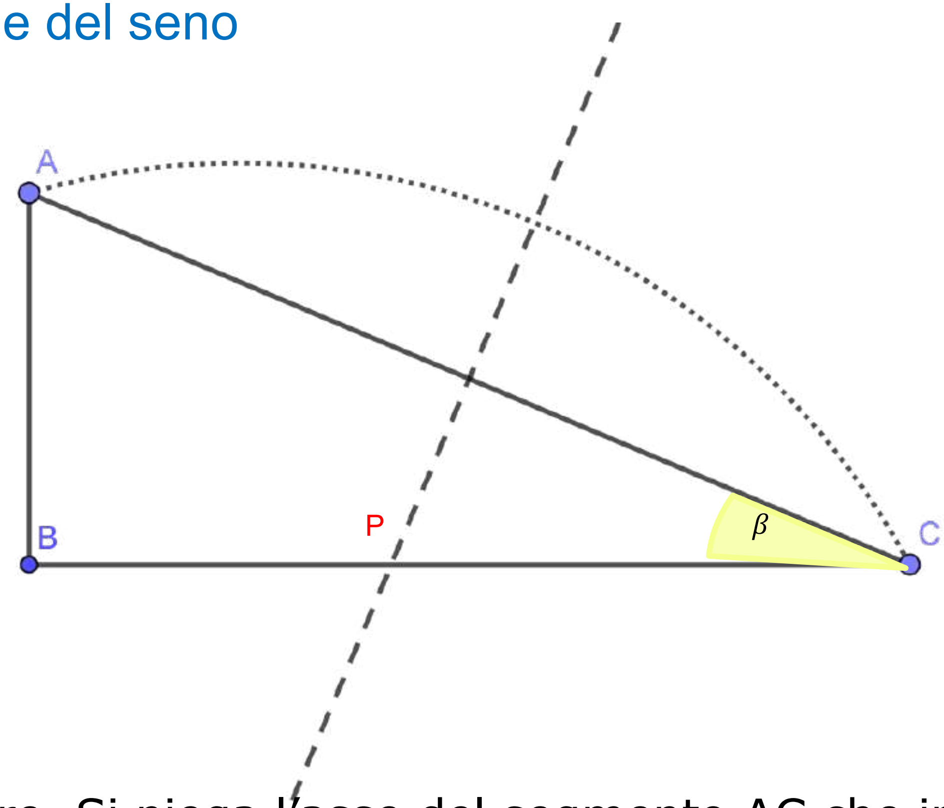
Faremo la dimostrazione nel caso $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$

[Per $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$ si può considerare $\beta' = \pi - \beta$, scrivere $\sin(2\beta) = \sin(2\pi - \beta') = -\sin(2\beta')$ e applicare la formula trovata, usando poi proprietà elementari sugli archi associati]

ANGOLI IN PIEGA (goniometro)

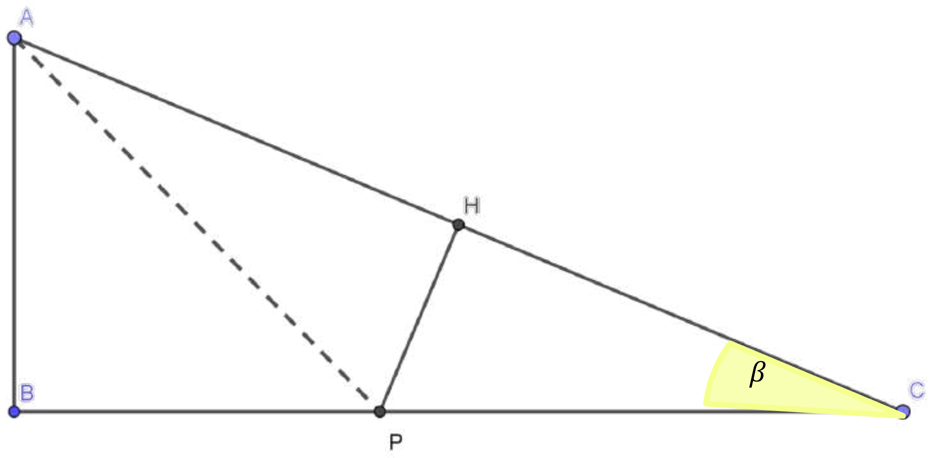
Formula di duplicazione del seno

Idea spiegata da T. Hull



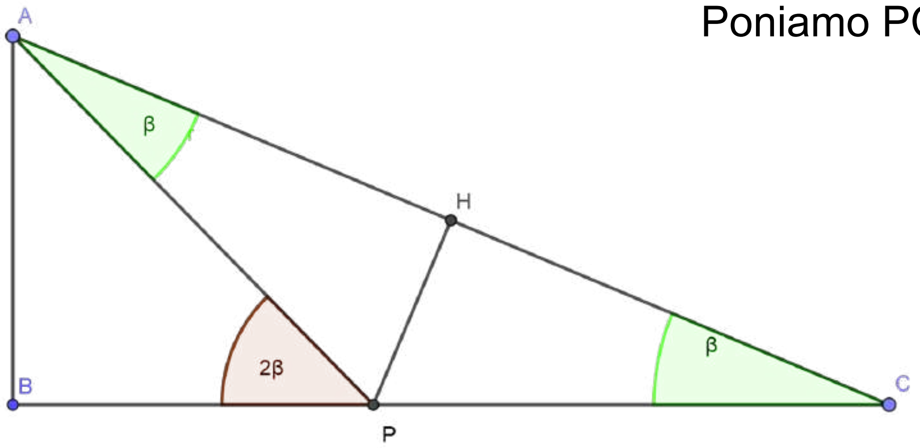
Portare C su A e riaprire. Si piega l'asse del segmento AC che incontra in P la base BC.

ANGOLI IN PIEGA (goniometro)



Piegare il segmento AP. Il triangolo APC è isoscele perché P sta sull’asse del segmento AC (*tangibilmente* CP si sovrappone ad AP).

ANGOLI IN PIEGA (goniometro)



Poniamo PC=PA =1

L'angolo $\widehat{BPA}$ è supplementare a $\widehat{CPA}$ ed è dunque congruente a 2β
si ha

AB= PA sin (2β)= sin(2β) e anche AB=**AC**sin(β)= **2PCcos(**β**)**sin(β), quindi

$$\sin(2\beta) = 2\cos(\beta)\sin(\beta)$$

Grazie per l’attenzione!