

I Problemi Inversi.

Ovvero: come vedere ciò che è nascosto.

Giovanni Alessandrini



Università degli Studi di Trieste

Trieste 3 maggio 2018

Buona parte della matematica si riduce allo studio e alla risoluzione di equazioni

$$F(x, p) = 0$$

dove x è l'incognita e p rappresenta un insieme di parametri dati mentre F è la legge che lega le incognite ai parametri. I problemi inversi sono problemi in cui il ruolo tradizionale di incognite e dati è scambiato.

In varie circostanze, infatti, i parametri p non sono noti (o sono solo parzialmente noti) mentre si possono ottenere (ad esempio tramite opportune misurazioni) informazioni sulle incognite x .

Integrazione:

$$x(t) = \int_0^t p(s) ds.$$

$x = x(t)$ funzione incognita, $p = p(t)$ funzione assegnata (parametri).

Integrazione:

$$x(t) = \int_0^t p(s) ds.$$

$x = x(t)$ funzione incognita, $p = p(t)$ funzione assegnata (parametri).

Derivazione:

se $x(t)$ è il dato e $p(t)$ l'incognita:

$$p(t) = \frac{d}{dt}x(t).$$

Problemi Ben Posti



Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice **ben posto** se:

Problemi Ben Posti



Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice **ben posto** se:

- Una soluzione esiste.

Problemi Ben Posti



Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice **ben posto** se:

- Una soluzione esiste.
- La soluzione è unica.

Problemi Ben Posti



Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice **ben posto** se:

- Una soluzione esiste.
- La soluzione è unica.
- La soluzione dipende con continuità dai dati (**stabilità**).

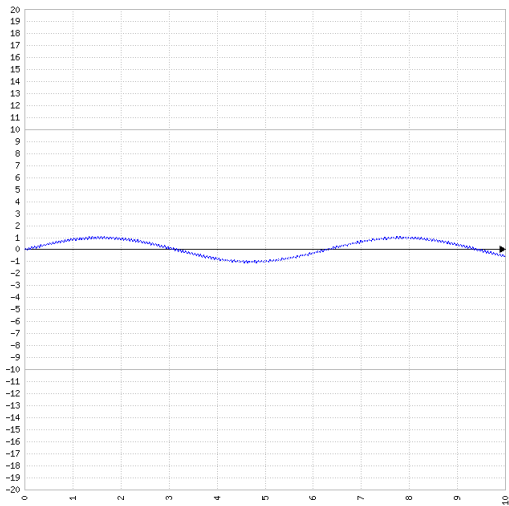
Problemi Ben Posti



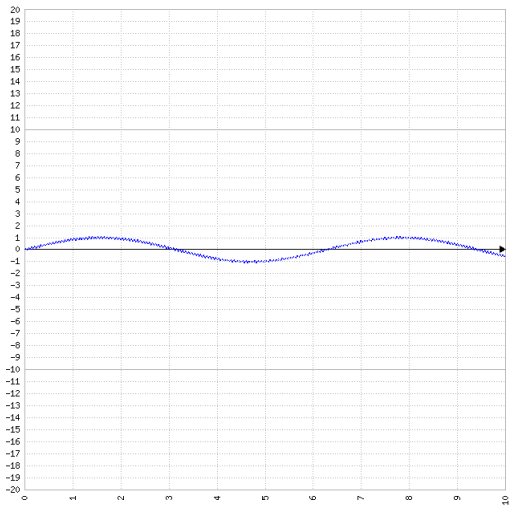
Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice **ben posto** se:

- Una soluzione esiste.
- La soluzione è unica.
- La soluzione dipende con continuità dai dati (**stabilità**).

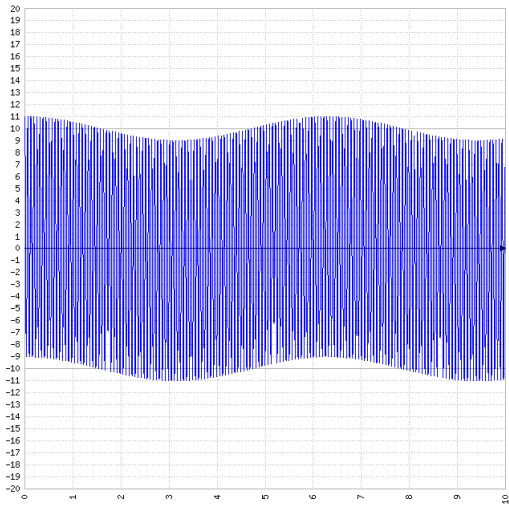
« I problemi che hanno origine da modelli della fisica matematica sono ben posti » (?)



$$x(t) = \sin t$$



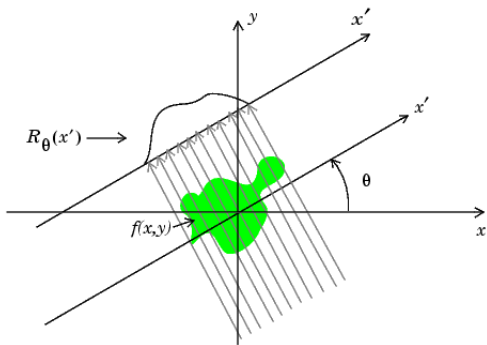
$$x(t) = \sin t + \frac{\sin(100t)}{10}$$



$$\frac{d}{dt}x(t) = \cos t + 10 \cos(100t)$$



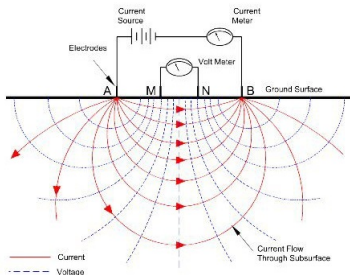
Trasformata di Radon, 1917



Grazie a MathWorks.



Conrad e Marcel Schlumberger Mappe del sottosuolo da misure elettriche, 1912–1919.



Grazie a: Schlumberger, OpenEI

Problemi
Inversi

Giovanni
Alessandrini

Introduzione

Problemi Ben
Posti

Trasformata di
Radon

I fratelli
Schlumberger

Regolarizzazione

TAC

EIT

Fine



Andrej Nikolaevič Tichonov
Metodo di regolarizzazione, 1943–1963.

Data

$$A = \{a_{ij}\}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$$

risolvere

$$Ax = y$$

dove $y = (y_1, \dots, y_N)^T$ è assegnato e $x = (x_1, \dots, x_M)^T$ è l'incognita.

Data

$$A = \{a_{ij}\}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$$

risolvere

$$Ax = y$$

dove $y = (y_1, \dots, y_N)^T$ è assegnato e $x = (x_1, \dots, x_M)^T$ è l'incognita.

Minimi quadrati di Gauss

$$\|Ax - y\|^2 = \min$$

(qui $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^N z_i^2$).

Data

$$A = \{a_{ij}\}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$$

risolvere

$$Ax = y$$

dove $y = (y_1, \dots, y_N)^T$ è assegnato e $x = (x_1, \dots, x_M)^T$ è l'incognita.

Minimi quadrati di Gauss

$$\|Ax - y\|^2 = \min$$

(qui $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^N z_i^2$).

Se x_{min} è minimante, ed esiste $x_0 \neq 0$ t.c. $Ax_0 = 0$, allora ogni

$$x = x_{min} + t x_0, -\infty < t < +\infty$$

è minimante.

Regolarizzazione

$$\|Ax - y\|^2 + \lambda\|x\|^2 = \min, \lambda > 0.$$

Esiste un'unica soluzione:

$$x_\lambda = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T y$$

"Filosofia" dei problemi non ben posti

- 1 Sfruttare le informazioni aggiuntive disponibili, non incorporate nel modello

"Filosofia" dei problemi non ben posti

- 1 Sfruttare le informazioni aggiuntive disponibili, non incorporate nel modello
- 2 Adattare le richieste di Hadamard:

"Filosofia" dei problemi non ben posti

- 1 Sfruttare le informazioni aggiuntive disponibili, non incorporate nel modello
- 2 Adattare le richieste di Hadamard:
 - Unicità \rightarrow supponendo che tutte le misure possibili siano disponibili.

"Filosofia" dei problemi non ben posti

- 1 Sfruttare le informazioni aggiuntive disponibili, non incorporate nel modello
- 2 Adattare le richieste di Hadamard:
 - Unicità \rightarrow supponendo che tutte le misure possibili siano disponibili.
 - Stabilità \rightarrow stabilità condizionata.

"Filosofia" dei problemi non ben posti

- 1 Sfruttare le informazioni aggiuntive disponibili, non incorporate nel modello
- 2 Adattare le richieste di Hadamard:
 - Unicità \rightarrow supponendo che tutte le misure possibili siano disponibili.
 - Stabilità \rightarrow stabilità condizionata.
 - Esistenza \rightarrow Ammesso che la soluzione esista, c'è un algoritmo che la approssima.

Problemi
Inversi

Giovanni
Alessandrini

Introduzione

Problemi Ben
Posti

Trasformata di
Radon

I fratelli
Schlumberger

Regolarizzazione

TAC

EIT

Fine



Allan McLeod Cormack 1963, Godfrey Hounsfield 1971



Allan McLeod Cormack 1963, Godfrey Hounsfield 1971

Premio Nobel 1979



Problemi
Inversi

Giovanni
Alessandrini

Introduzione

Problemi Ben
Posti

Trasformata di
Radon

I fratelli
Schlumberger

Regolarizzazione

TAC

EIT

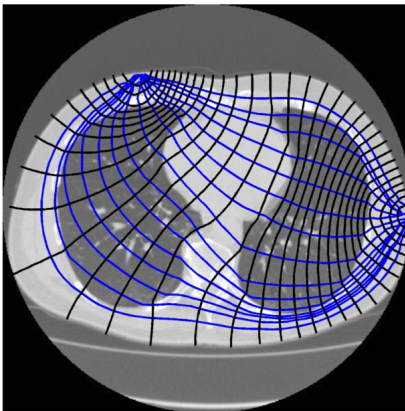
Fine

EIT, tomografia da impedenza elettrica



Grazie a Science Museum London

EIT, tomografia da impedenza elettrica



► Samuli

Grazie a Samuli Siltanen.

Problemi
Inversi

Giovanni
Alessandrini

Introduzione

Problemi Ben
Posti

Trasformata di
Radon

I fratelli
Schlumberger

Regolarizzazione

TAC

EIT

Fine

GRAZIE!