# I CRISTALLI DI PIRITE

Gilberto Bini
Università degli Studi di Milano
Trieste, 19 gennaio 2018

# L'UNICA REALTÀ

*Non solo la matematica è reale, ma è l'unica realtà. Beh, l'universo è composto di materia ovviamente. E la materia è composta di particelle: elettroni, neutroni e protoni. Dunque l'intero universo è composto di particelle. Ora, di che cosa sono fatte le particelle? Di nulla. L'unica cosa che si può dire sulla realtà di un elettrone è citarne le sue proprietà matematiche. Quindi in un certo senso la materia si dissolve completamente, e rimane semplicemente la struttura matematica.*

*Gardner on Gardner: JPBM Communication Awards*

*Focus, The MAA Newsletter*, v. 14 (1994), n. 6, p. 3

# I CRISTALLI E I LORO BLOCCHI

La «leggenda» vuole che l'abate René Just Hauey (1743-1822) abbia notato che i frammenti di un cristallo riproducevano in piccolo la forma dell'esemplare originario.

I cristalli sarebbero formati da minuscoli blocchi di forma identica ordinati in file e piani sovrapposti.

Un'adeguata ricombinazione dei blocchi avrebbe dato vita a numerose forme.

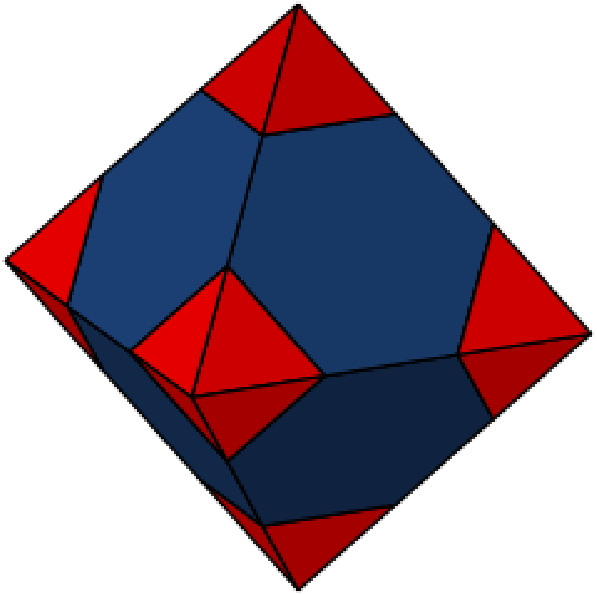
# I POLIEDRI E I CRISTALLI

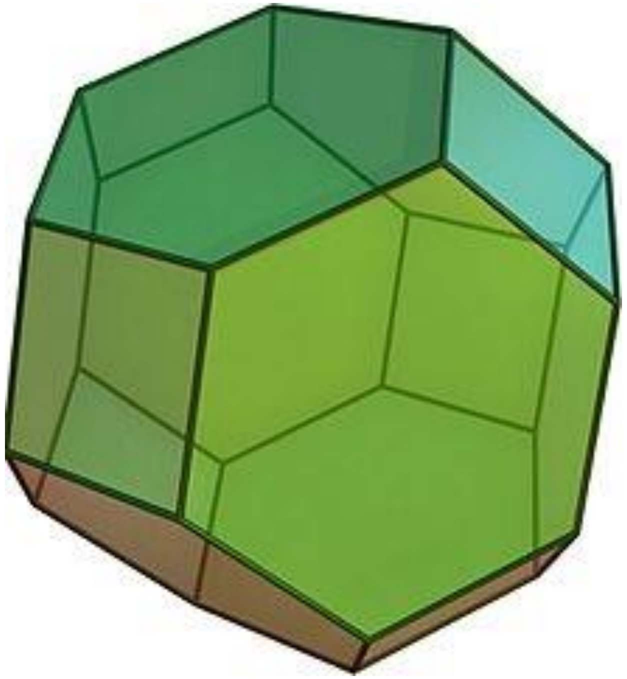
L'idea originaria era che questi blocchi fondamentali fossero dei poliedri che si potevano accostare riempiendo tutto lo spazio, senza lasciare buchi e senza sovrapposizioni.

Quali poliedri tassellano lo spazio?

E se i blocchi fossero anche sfere, o pacchetti di sfere?

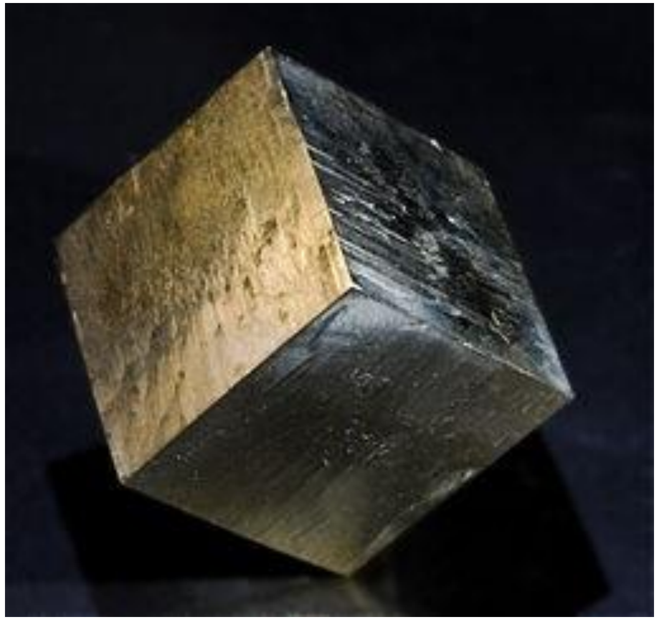
# UNA TASSELLAZIONE DELLO SPAZIO





# L'ORO DEGLI STOLTI

La pirite (disolfuro di ferro) si può presentare in cristalli ottaedrici o cubici.

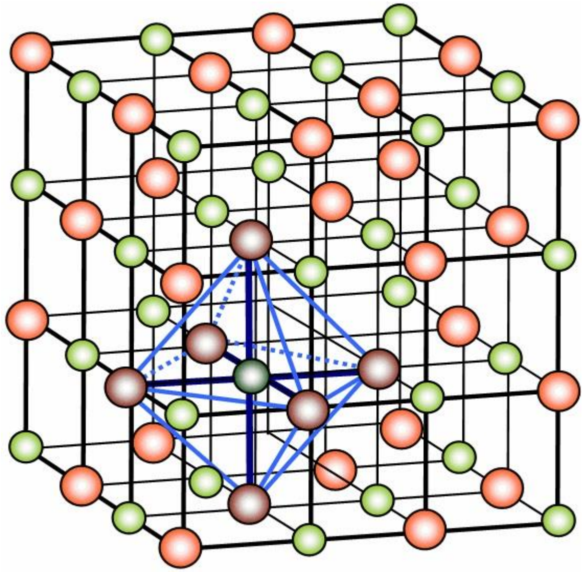


# LA FLUORITE

La fluorite è un minerale composto da fluoruro di calcio. Forma in genere cristalli regolari e grossi di forma cubica.

# I RETICOLI CRISTALLINI

La struttura dei cristalli viene descritta mediante *sistemi di punti* che possono essere interpretati come i centri dei poliedri o delle sfere (i cosiddetti blocchi). Tale sistema deve essere discreto, cioè due punti non possono avvicinarsi troppo e i blocchi si compongono in modo da non lasciare spazi vuoti.



# ORDINATO?

- Per «ordinato» si intende che i punti del sistema dei punti si dispongano lungo file e piani paralleli in modo da formare quello che viene chiamato un reticolo tridimensionale R.
- Possiamo pensare R come l'insieme delle immagini dei punti del sistema ottenute, applicando a ciascuno di essi, una dopo l'altra, tre traslazioni lungo tre direzioni indipendenti.
- Il reticolo ha solo un significato geometrico: per costruire da esso il cristallo, occorre associare a ogni suo punto atomi, ioni o molecole di un solo elemento o di più elementi della tavola periodica.

# UN'IPOTESI DI REGOLARITÀ

Per descrivere i cristalli, non basta un reticolo qualsiasi!

I sistemi di punti devono soddisfare un'ipotesi di regolarità: comunque si scelgano due punti del sistema, deve esistere un'isometria dello spazio che manda i due punti l'uno nell'altro e trasforma il sistema complessivamente in se stesso.

# L'IPOTESI DI REGOLARITÀ

- Se esiste una rotazione, esistono infiniti centri di rotazione ottenuti per traslazione.
- Esistono alcune restrizioni sugli angoli di rotazione che sono possibili.
- Si dimostra che le sole simmetrie di rotazione sono quelle di ordine 2, 3 e 6.

# IL GRUPPO DI SIMMETRIA

- Individuare una cella unitaria, cioè quelle che generano l'intero cristallo con sole operazioni di traslazione.
- L'idea di cella unitaria è stata introdotta da Huygens (1629-1695) per interpretare le proprietà ottiche della calcite.
- Oltre alle traslazioni, occorre comprendere la struttura del sottogruppo che fissa un punto e manda il reticolo in se stesso, il cosiddetto gruppo puntuale.

# LA CLASSIFICAZIONE DEI CRISTALLI

- Esistono sette famiglie di reticoli, detti reticoli di Bravais, dal francese Auguste Bravais che nel 1848 descrisse per primo le proprietà matematiche dei reticoli cristallini.
- **Sistema monometrico o cubico.** La cella unitaria può avere tre forme: un cubo, un cubo centrato in un punto che è centro di simmetria del sistema cristallino o un cubo con la facce centrate in punti che sono centri di simmetria per il reticolo.

Il gruppo di simmetria è quello delle simmetrie di un cubo!

# INDICAZIONI NAZIONALI...

*Le indicazioni nazionali per le scuole secondarie di secondo grado pongono l'enfasi «sulla necessità di costruire, attraverso il dialogo tra le diverse discipline, un profilo coerente e unitario dei processi culturali. Progettare percorsi di effettiva intersezione tra le materie è compito della programmazione collegiale dei dipartimenti disciplinari e dei consigli di classe».*

# ...PER LE SCUOLE SECONDARIE DI SECONDO GRADO

**II biennio.**

- Sviluppare l'intuizione geometrica, estendendo allo spazio alcuni temi della geometria piana.
- Studio delle posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.
- Studio delle principali proprietà dei solidi geometrici.

**V anno**

- Elementi di geometria analitica dello spazio, in particolare rette, piani e sfere.

# IL PUNTO DI VISTA ANALITICO

Fissiamo il cupo di lato 2 con vertici nei punti di coordinate

| | |
|---|---|
| (1,1,1), | (-1,-1,-1) |
| (1,1,-1) | (-1,-1,1) |
| (1,-1,-1) | (-1,1,1) |
| (1,-1,1) | (1,-1,-1) |

Si possono quindi dedurre le equazioni cartesiane per le 12 rette individuate dagli spigoli e per i 6 piani individuate dalle facce.

# LE SIMMETRIE DEL CUBO

I 6 piani hanno equazioni $z = \pm 1, x = \pm 1, y = \pm 1$.

I centri delle facce, che individuano tali piani, sono dati dai seguenti punti

$(0,0,\pm 1), (\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0)$.

$X \;\to AX$, dove A è una matrice 3 x 3 e X è il vettore colonna con componenti $x, y, z$.

# LE SIMMETRIE DEL CUBO

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# SVILUPPARE L'INTUIZIONE GEOMETRICA…

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (y, -x, z)$$

Il piano xy viene mandato globalmente in se stesso ma non punto per punto. Sul piano z=k, la trasformazione A ruota il cubo rispetto alla retta x=y=0 di $\pi/2$ in verso antiorario.

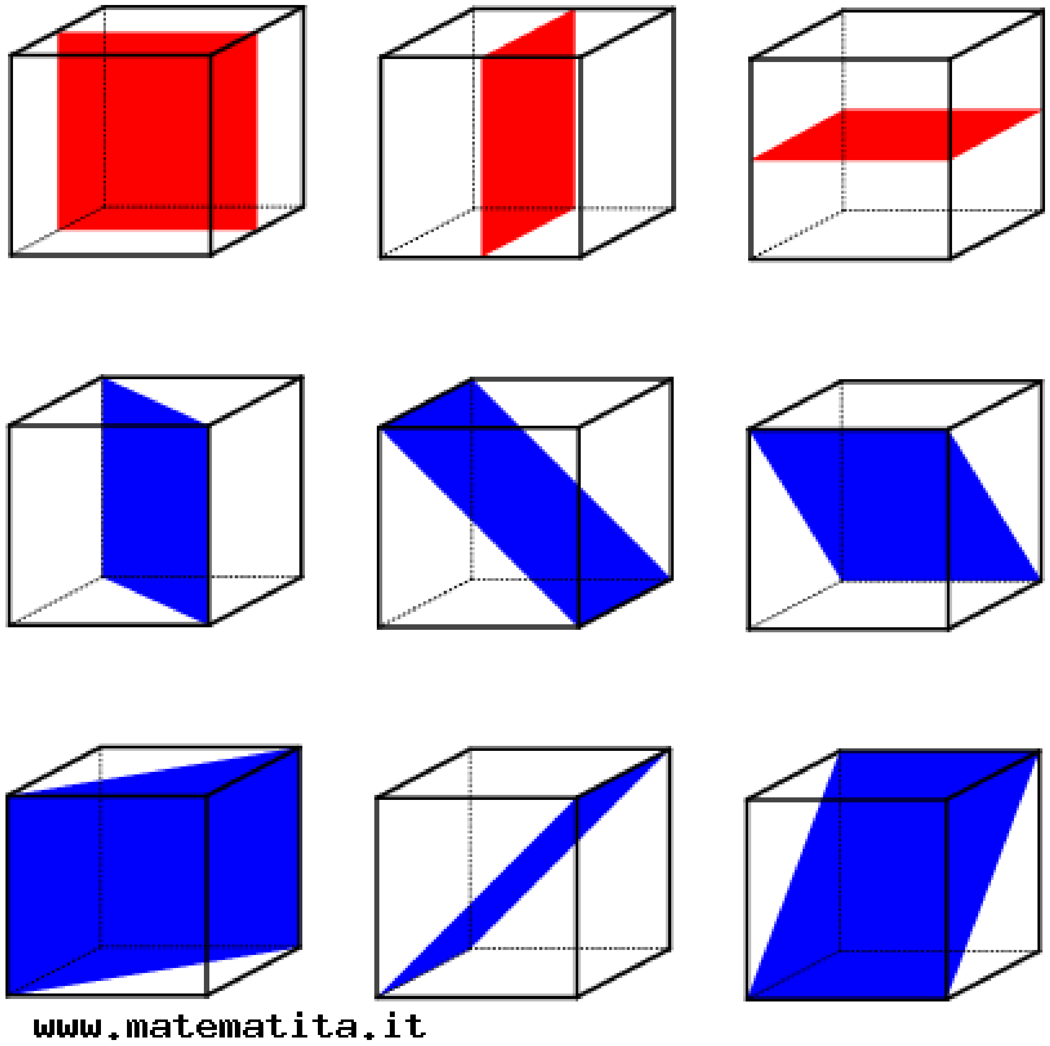
# SVILUPPARE L'INTUIZIONE GEOMETRICA....

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

Ogni punto del cubo viene mandato nel punto dalle coordinate opposte.
Questa trasformazione viene chiamata applicazione antipodale.

# I PIANI DI RIFLESSIONE DEL CUBO

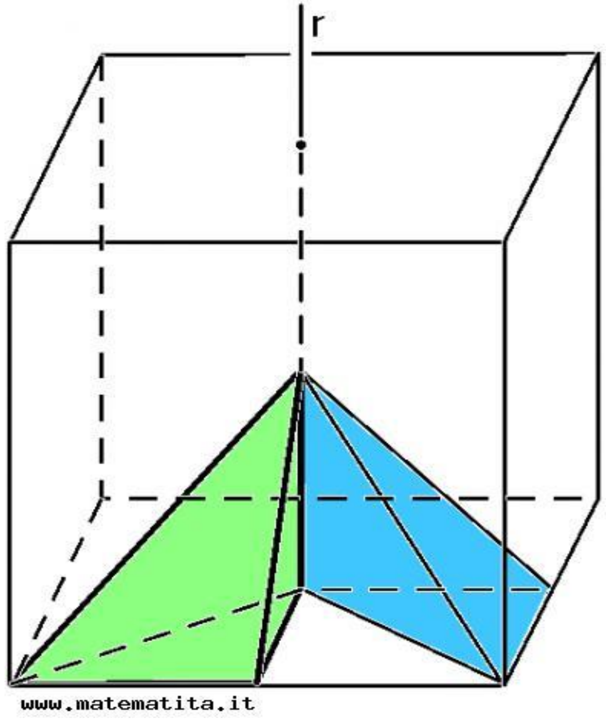


# LE ROTAZIONI DEL CUBO

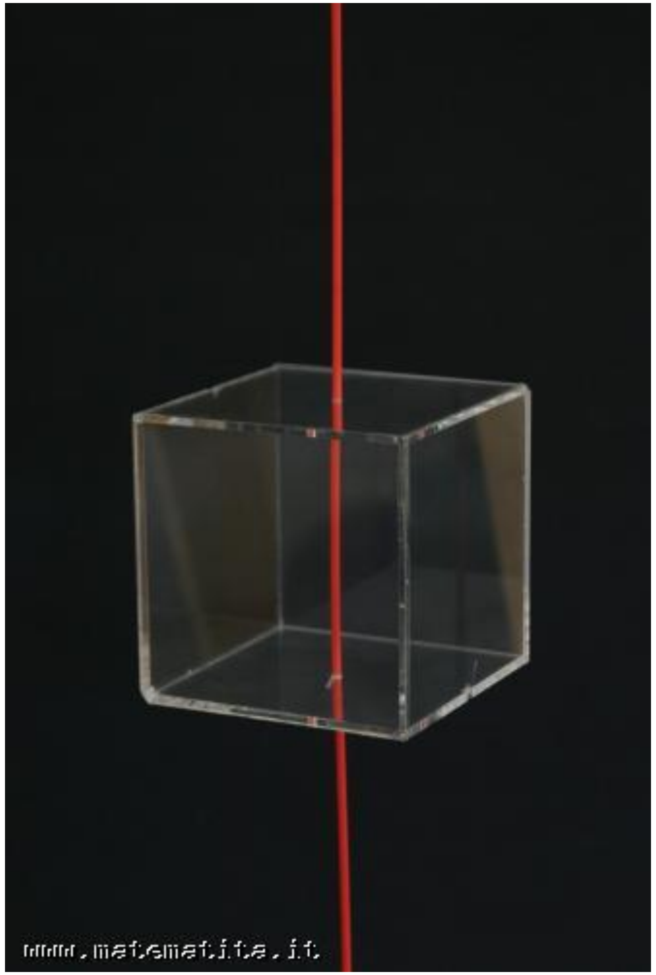
Esistono 24 simmetrie rotatorie che mandano il cubo in se stesso. Una di esse è la trasformazione identica. Quali sono le altre 23?

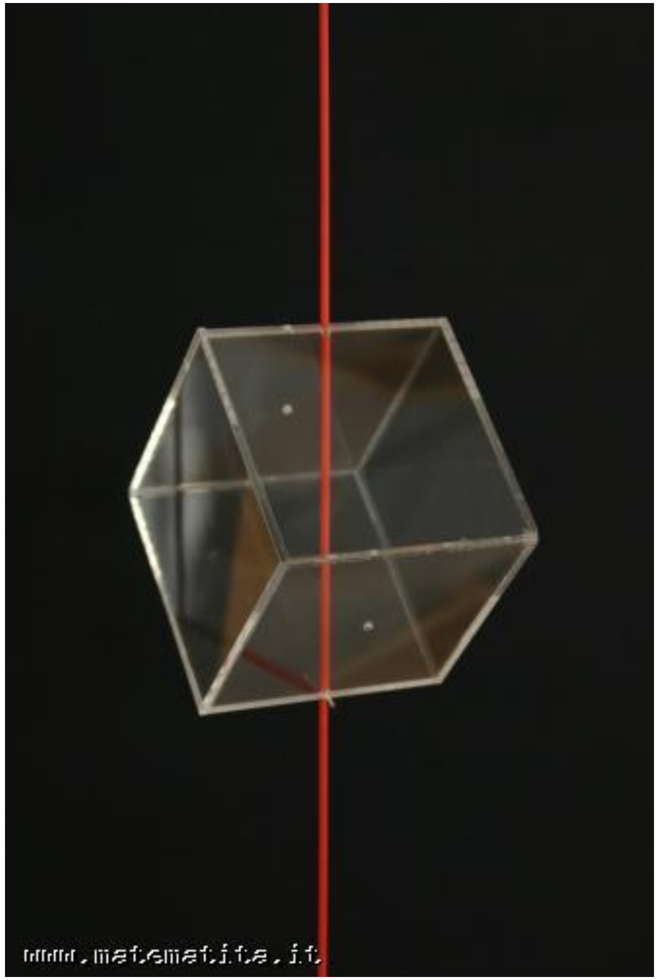
Come individuarle da un punto di vista analitico?

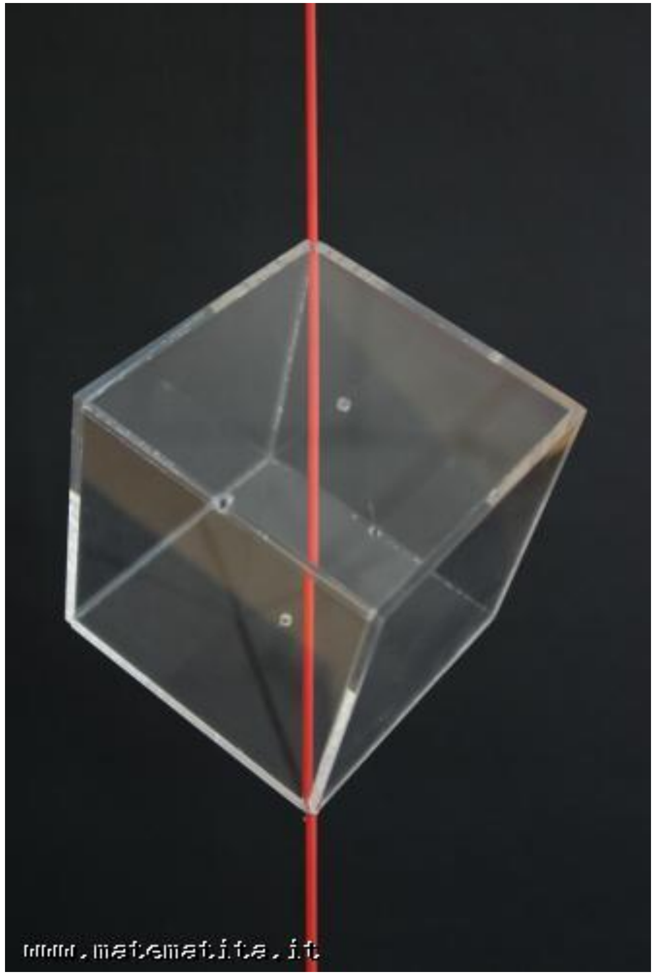
E da un punto di vista sintetico?



# GLI ASSI DI ROTAZIONE



# IL LABORATORIO

- Testato in classi del secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado (soprattutto licei scientifici) nell'ambito del Piano Nazionale Lauree Scientifiche.
- Offerto come laboratorio nell'ambito delle iniziative del Centro «matematita», Unità di Milano Città Studi.
- Esplora da un punto di vista sintetico le simmetrie, in particolare la struttura del gruppo delle rotazioni, insistendo sulla loro visualizzazione, descrizione sintetica ed enumerazione.

# PER APPROFONDIRE...

***Bibliografia***


Anna Asti, Dai cristalli alle simmetrie del cubo, *XlaTangente 1*, ottobre 2014, 32--34

Gilberto Bini, Iacopo Frattini, Tutti pazzi per i cristalli, *XlaTangente 1*, ottobre 2014, 29—31

Liliana Curcio, Jacopo De Tullio, Desiderio Poletto, *Tutto è funzione*, Alice&Bob n. 43, Egea, 2017.


***Sitografia***


http://www.matematita.it/materiale/?p=home