La musica è il piacere che la mente umana prova
quando conta senza essere conscia di contare
(Gottfried Leibniz)

Matematica e scale musicali

di **Edi Rosset**

Abstract. La presentazione intende offrire spunti agli insegnanti delle scuole elementari, medie e superiori per lo sviluppo di un percorso interdisciplinare che interessa musica, matematica e fisica. La motivazione che ha stimolato questo intervento è stata una curiosità: se il numero delle note che si usano nella musica occidentale sia solo frutto dell'evoluzione culturale e quindi sia casuale, oppure se in tale scelta ci sia qualcosa di naturale. In bibliografia sono proposti alcuni testi e siti internet, ma la possibilità di approfondire l'argomento sul web, anche con tutorial o siti interattivi, è veramente assai ricca.

Nel mondo occidentale, la prima teoria sulla formazione di una scala musicale, cioè la definizione di un criterio per scegliere una sequenza di suoni da utilizzare per produrre musica, è comunemente attribuita a Pitagora. Pitagora visse nel VI secolo a.C. e la sua figura è circondata da un alone mitico. Con la sua frase più famosa, "tutto è numero" egli intendeva che tutti i fenomeni naturali sono regolati da rapporti fra numeri interi. E a questa conclusione sembra sia giunto proprio studiando l'armonia musicale. Vari sono gli aneddoti che intendono spiegare quale sia sata l'origine della sua intuizione di una stretta connessione tra musica e matematica. Prendiamo in considerazione quello che narra l'esperimento con le corde vibranti. Pitagora utilizza come corde nervi di bue posti in tensione, tutti della stessa lunghezza. Pizzicando la prima corda ottiene un suono. Utilizzando dei ponticelli mobili blocca le altre corde in varie posizioni, accorciandole, e osserva che se si posiziona il ponticello a caso i suoni prodotti pizzicando simultaneamente la corda intera e quella accorciata sono generalmente dissonanti, ovvero sgradevoli all'orecchio. Ma scopre che ci sono alcune situazioni più fortunate: se si dimezza la lunghezza della seconda corda (ponendo il ponticello a metà), si ottiene un suono che si percepisce come lo stesso suono prodotto dalla corda intera, ma più acuto. Per fissare le idee, chiamiamo la prima nota Do_1, la seconda, più acuta, Do_2 (dell'ottava superiore). Parlando di ottava si sta usando un termine non ancora motivato, e che si riferisce al fatto che tra due Do successivi ci sono 8 note contando le due note agli estremi dell'intervallo musicale: si parlerà similmente di intervalli di quinta, cioè intervalli che contengono 5 note contando le due note agli estremi, ecc., per poter usare un linguaggio più semplice. Riducendo la lunghezza a un quarto si percepisce lo stesso suono, ma ancora più acuto (due ottave sopra, Do_3); riducendo la lunghezza della corda a $\frac{2}{3}$ si ottiene un nuovo suono (che chiamiamo Sol), diverso dal primo ma ad esso consonante, cioè la produzione simultanea dei due suoni genera una percezione gradevole; riducendo la lunghezza della corda a $\frac{3}{4}$ si produce un suono ancora consonante con Do_1 (che chiamiamo Fa). In pratica, Pitagora nota che c'è consonanza tra il suono prodotto dalla vibrazione della corda intera e quelli ottenuti dalle corde di lunghezza diminuita della metà, di un terzo, di un quarto e così via, ma *anche* che la consonanza peggiora al crescere del denominatore della frazione di corda rimossa. Cosa molto importante, osserva che la consonanza non dipende dalla lunghezza delle corde utilizzate ma solo dai rapporti delle loro lunghezze (a parità naturalmente di materiale, spessore e tensione delle corde).

Pitagora osservò che questa regolarità di rapporti numerici si ripresentava identica in esperimenti simili in cui i suoni venivano prodotti usando recipienti contenenti acqua (i classici bicchieri in fila con quantità di acqua nei rapporti $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ecc) o ascoltando il suono di martelli o campane aventi i pesi negli stessi rapporti o di flauti con lunghezze negli stessi rapporti.

Nell'immagine è raffigurato Pitagora mentre compie osservazioni sulle corde vibranti. In altre immagini, facilmente reperibili sul web, il matematico è raffigurato nell'atto di compiere altri esperimenti musicali. Se si osserva attentamente, in tutte le situazioni ricorrono gli stessi numeri: 4,6,8,9,12,16; non è difficile verificare il significato di questa sequenza ricercando in essa i rapporti numerici osservati da Pitagora.

Questa regolarità matematica in fenomeni fisici così diversi lo convinse dell'esistenza di una legge universale che lega la musica ai numeri interi e ai loro rapporti. Non solo concluse che l'armonia musicale si può esprimere coi numeri, ma estese questa idea a tutti gli elementi dell'universo, fino alla teoria dell'"armonia delle sfere", secondo cui i corpi celesti nei loro regolari movimenti produrrebbero una musica armoniosa.

Cerchiamo di interpretare i risultati trovati da Pitagora usando le nostre conoscenze scientifiche dei fenomeni naturali. Possiamo definire il suono come la percezione da parte dell'orecchio delle onde sonore, che sono originate dalle vibrazioni di una sorgente (che può essere costituita ad esempio da uno strumento musicale o dalle corde vocali), vibrazioni che causano un'alternanza di compressioni e rarefazioni dell'aria che si propagano alla velocità di circa $340m/s$ (il fenomeno è analogo in altri mezzi, quello che cambia è la velocità dell'onda sonora). Possiamo rappresentare graficamente un'onda sonora riportando su un asse orizzontale il tempo t e su un asse verticale lo scostamento della densità dell'aria dal suo valore a riposo. La densità varia oscillando attorno al valore a riposo, aumentando durante la compressione e diminuendo nella fase di rarefazione. Nel caso di un'onda sonora pura, il grafico che la rappresenta è una curva sinusoidale, ma si tratta di una situazione rarissima in natura; esempi di suoni puri sono quello generati da un diapason, o il sibilo, o il suono prodotto dallo sfregamento di un dito umido sul bordo di un bicchiere di cristallo. Come noto, la durata di un'oscillazione è detta periodo (T) e si misura in secondi; il numero di oscillazioni compiute in un secondo si chiama frequenza (f) e si misura in hertz (Hz). Si ha che $fT = 1$. Ad esempio, se la frequenza è $f = 20$, ci sono 20 oscillazioni al secondo, e quindi la loro durata sarà $T = \frac{1}{20}$ di secondo. Quanto maggiore è la frequenza, tanto maggiore è l'altezza del suono, ovvero il suono è più acuto.

Se si producono due onde sonore, l'onda risultante è la somma delle rispettive onde e il grafico risultante si ottiene semplicemente "sommando" i grafici delle funzioni oscillatorie. Alcuni esempi sono riportati nel file *grafici-onde* allegato. Nel caso di due onde di frequenza f e $2f$, che esemplificano le note Do_1 e Do_2, l'onda risultante $Do_1 + Do_2$ ha lo stesso periodo e la stessa frequenza della prima onda. L'onda risultante da due onde aventi rapporto di frequenze $\frac{3}{2}$ (tipo $Do + Sol$) è ancora un'onda periodica, di periodo doppio $2T$. Per le onde risultanti $Do + Re$ e $Do + Do^\sharp$ i rapporti delle frequenze sono espressi da frazioni di crescente complessità, di conseguenza il periodo dell'onda risultante aumenta sempre più. Si noti che è stato compresso sempre di più l'asse dei tempi affinchè contenesse un intero periodo, quindi il periodo è maggiore di quel che appare, vale 8 per $Do + Re$, mentre per $Do + Do^\sharp$ sembrerebbe 15, ma in realtà è molto maggiore, vale 2048. In generale, al crescere del numeratore e del denominatore della frazione che esprime il rapporto delle frequenze, il periodo cresce e l'oscillazione è meno regolare. Se poi il rapporto è un numero irrazionale, cioè non esprimibile con una frazione, allora l'onda sonora risultante non è più periodica. Sembra allora naturale mettere in relazione la percezione gradevole dei suoni consonanti, ovvero quella che viene anche chiamata la loro *armonia*, con la regolarità delle onde risultanti.

Ora, l'orecchio è in grado di riconoscere non le singole frequenze, ma solo i rapporti di frequenze, e sono quindi questi rapporti che determinano la "distanza" percepita tra due suoni, ovvero l'ampiezza dell'intervallo musicale.

Ad esempio le frequenze f, 2f, 4f, 8f... caratterizzano la stessa nota che via via diventa più acuta (Do_1, Do_2, Do_3, Do_4...), ed è il rapporto delle frequenze che rimane costante uguale a 2, mentre la differenza cambia passando da f a $2f$ a $4f$. Diremo pertanto che all'intervallo di ottava corrisponde un rapporto di frequenze di 2, a quello di quinta pura un rapporto di $\frac{3}{2}$, all'intervallo di prima ($Do_1 - Do_1$) rapporto 1.

Quello che accade con le corde vibranti è che dimezzandone la lunghezza, si raddoppia la frequenza dell'onda sonora prodotta, riducendola a $\frac{1}{4}$ si quadruplica la frequenza, se il rapporto delle lunghezze delle corde è $\frac{2}{3}$, quello delle frequenze è $\frac{3}{2}$, e così via. Quindi se la corda di lunghezza L produce la nota Do_1 avente frequenza f, quelle di lunghezza $\frac{L}{2}$, $\frac{2}{3}L$, $\frac{3}{4}L$, producono rispettivamente le note Do_2, Sol, Fa, aventi frequenze $2f$, $\frac{3}{2}f$, $\frac{4}{3}f$, In generale, il rapporto delle frequenze delle onde sonore prodotte da una coppia di corde vibranti è il reciproco del rapporto delle loro lunghezze e pertanto quanto osservato sulle onde sonore può spiegare i risultati di Pitagora.

Veniamo ora alla ricerca di una scala musicale. Rappresentiamo su un segmento le frequenze dell'intervallo di ottava da Do_1 a Do_2. L'obiettivo è inserire note intermedie in modo che:

1) si producano coppie di note consonanti;

2) il numero delle note permetta di costruire una musica ricca ma senza esagerare perchè la "distanza" tra note successive deve essere apprezzabile dall'orecchio (bilanciare numerosità delle note con possibilità di distinguerle);

3) le note coprano l'intervallo in modo equidistanziato, cioè gli intervalli tra note successive abbiano la stessa ampiezza.

Pitagora costruisce la sua scala usando i rapporti di frequenze più consonanti, cioè 2 (detto di ottava, esemplificato dalla coppia $Do_1 - Do_2$) e $\frac{3}{2}$ (detto di quinta, esemplificato dalle coppie $Do_1 - Sol$ e $Fa - Do_2$). Dato che conta solo il rapporto delle frequenze, per alleggerire la notazione possiamo indicare le frequenze di Do_1 e Do_2 con 1 e 2 (in pratica stiamo indicando il rapporto tra la frequenza di ciascuna nota e la frequenza di Do_1). Inseriamo allora la nota di frequenza $\frac{3}{2}$ (Sol), che forma un intervallo di quinta con Do_1 e quella di frequenza $\frac{4}{3}$ ($< \frac{3}{2}$) (Fa) che forma un intervallo di quinta con Do_2. Si noti che abbiamo così inserito indirettamente l'intervallo di quarta Do_1-Fa, caratterizzato da rapporto di frequenze $\frac{4}{3}$. Ora saliamo di una quinta a partire dal Sol, moltiplicando la frequenza del Sol per $\frac{3}{2}$, ottenendo $\frac{9}{4} > 2$, che quindi esce dal nostro intervallo, per cui la dividiamo per 2 per ottenere la stessa nota (più grave) nell'intervallo scelto (qui usiamo la consonanza delle ottave), trovando la frequenza $\frac{9}{8}$ e chiamiano Re la nota corrispondente. Così via, $\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$ (La), $\frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{32} > 2$ quindi si divide per 2 e si trova $\frac{81}{64}$ (Mi), $\frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$ (Si). Gli intervalli $[Do_1, Sol]$, $[Re, La]$, $[Mi, Si]$, $[Fa, Do_2]$, essendo stati costruiti salendo di una quinta, hanno lo stesso rapporto di frequenze $= \frac{3}{2}$), e lo si coglie suonando le coppie; similmente le coppie $Do_1 - Fa$, $Re - Sol$, $Mi - La$, $Fa - Si$, $Sol - Do_2$ hanno lo stesso rapporto di frequenze $\frac{4}{3}$. Quella che abbiano trovato è detta *scala pitagorica diatonica.*

Calcoliamo ora i rapporti di frequenze tra note consecutive: $\frac{Re}{Do} = \frac{9}{8}$; l'intervallo caratterizzato da rapporto di frequenze $\frac{9}{8}$ è detto di tono, $T = \frac{9}{8} = 1,125$; $\frac{Mi}{Re} = T$; $\frac{Fa}{Mi} = \frac{256}{243}$; l'intervallo caratterizzato da rapporto di frequenze $S = \frac{256}{243} \cong 1,05349$ è detto *semitono diatonico pitagorico.* Si susseguono nell'ordine $T - T - S - T - T - T - S$. $\Rightarrow$ Le sette note **non** formano intervalli uguali, il terzo requisito non è soddisfatto.

Ora, l'uniformità degli intervalli è una richiesta ragionevole, ma che non fu considerata da Pitagora. La diversità degli intervalli formati da note successive non è però solo una questione di mancanza di simmetria, che può infastidire il gusto estetico dei matematici, ma costituisce un problema prettamente musicale: un aspetto importante in musica è infatti quello di poter adattare un brano alle diverse altezze delle voci dei cantanti, a volte impiegate per cantare contemporaneamente la stessa melodia ad altezze diverse: si tratta di poter trascrivere il brano su registri più gravi o più acuti.

Questa esigenza non era sentita nell'antichità classica e fino all'alto Medioevo. A partire dal IX secolo, il desiderio di rinnovare il canto gregoriano senza alterare le melodie portò gradualmente alla nascita e diffusione della polifonia (musica e canto a più voci).

Per cercare soluzione a questo problema, che nasce dalla non uniformità degli intervalli nella scala pitagorica, proseguiamo allora il procedimento cercando la nota che segue Si nel cosiddetto "ciclo delle quinte". Si ha $\frac{243}{128} \cdot \frac{3}{2}$ che, riportata nell'intervallo di base, diventa $\frac{729}{512} \cong 1,423$ che è una nuova nota la cui frequenza la posiziona tra il Fa e il Sol, la indichiamo con $Fa^\sharp$ ($\frac{Fa^\sharp}{Fa} = S' = \frac{2187}{2048} \cong 1,06787$ (*semitono cromatico pitagorico*), $\frac{Sol}{Fa^\sharp} = S$), $S' > S$ $S' \approx S$, $S' \cdot S = T$, e così avanti, troviamo cinque note intermedie che "suddividono" i cinque intervalli di tono. $Do^\sharp = \frac{2187}{2048}$, $Sol^\sharp = \frac{6.581}{4.096}$, $Re^\sharp = \frac{19.683}{16.384}$, $La^\sharp = \frac{59.049}{32.768}$. Si alternano ora $(S' - S) - (S' - S) - S - (S' - S) - (S' - S) - (S' - S) - S$, 12 note "quasi" equidistanziate.

La "differenza" tra semitono cromatico pitagorico e semitono diatonico pitagorico, naturalmente misurata come rapporto dei loro valori perchè stiamo lavorando con l'operazione di prodotto e non con l'addizione, è data da

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{2187}{2048}}{\frac{256}{243}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531.441}{524.288} \cong 1,0136432647705 \approx 1$$

Questa "differenza", molto piccola perchè prossima a 1, è detta *comma pitagorico.*

Proseguendo ancora il procedimento a partire dall'ultima nota trovata, il $La^\sharp$, si trova una nota avente frequenza di poco superiore al Fa, diciamo $\widetilde{Fa}$, e proseguendo dal $\widetilde{Fa}$ un $\widetilde{Do}$, di frequenza molto vicina al Do. ($\widetilde{Fa} = \frac{177.147}{131.072} \cong 1,3515 \approx 4/3 = 1,3333$, $\widetilde{Do} = \frac{531.441}{524.288}$, cioè il comma pitagorico). Ma le note $\widetilde{Fa}$ e $\widetilde{Do}$ non sono state inserite nella scala musicale perchè sono troppo "vicine" a Fa e Do per distinguerle in una melodia.

Con un generatore di toni online, possiamo suonare in rapida sequenza Do_4 di frequenza 261 Hz e $\widetilde{Do}_4$ di frequenza 265 Hz, sono quasi indistinguibili; suonandole assieme, si genera un effetto assai fastidioso, dovuto ai battimenti, fenomeno che sarà ripreso più avanti.

Vediamo cosa succede passando da Do_1 a $\widetilde{Do}$, in due modi diversi:

a) siamo saliti 12 volte di una quinta, dimezzando 7 volte la frequenza per riportarci nell'intervallo scelto. Quindi in tutto abbiamo ottenuto una frequenza data da

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

cioè proprio il comma pitagorico

b) ogni intervallo di quinta è formato da $4S$ e $3S'$, ogni intervallo di ottava è formato da $7S$ e $5S'$. Quindi i dodici intervalli di quinta corrispondono a $48S$ e $36S'$ che, facendo un po' di calcoli, corrisponde a 7 ottave aumentate del comma pitagorico.

Si può procedere similmente all'indietro scendendo di una quinta dal Fa $(: \frac{3}{2})$ e poi moltiplicando per 2 per riportarsi nell'ottava di riferimento, che equivale a moltiplicare per $\frac{4}{3}$ trovando la frequenza $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$ intermedia tra La e Si, detta Si^b, $Si^b < La^\sharp$, che suddivide l'intervallo $La - Si$ in $S - S'$. Se si suonano col flauto dolce Si^b e $La^\sharp$ si può sentire la differenza. E così via $Mi^b = \frac{32}{27}$, $La^b = \frac{128}{81}$... $\Rightarrow$ Le note sono già diventate 17, ma in un brano in cui si usi il Si^b non si usa il $La^\sharp$ e viceversa.

La situazione si può visualizzare sul sito

https://www.youtube.com/watch?v=Au2QFQ2ppyg

in cui la prima sequenza evidenzia lo scostamento delle note della scala pitagorica generate dal cosiddetto "ciclo delle quinte" rispetto alle note ottenute dal pianoforte (che usa un'altra scala, la scala equabile, che sarà illustrata tra poco) mentre la seconda sequenza mostra le quinte ascendenti e le quinte discendenti e confronta il $Fa^\sharp$ con il Sol^b. Nel video però la tastiera del pianoforte trae in inganno perchè mostra paradossalmente lo stesso punto di arrivo, il *Do* finale.

Questo procedimento (basato sugli intervalli di quinta e di ottava) non ha mai fine, ovvero produce infinite frequenze sempre diverse, ovvero il "ciclo delle quinte" e quello delle ottave sono incompatibili. Il motivo per cui il "ciclo delle quinte" non si chiude, ed è infatti spesso indicato più correttamente come spirale delle quinte, è legato, come abbiamo visto, all'esistenza del comma pitagorico, cioè di due tipi di semitoni di diverso valore. Che il ciclo non si chiuda mai, ovvero che non si possa ritrovare una nota già inserita, è evidente per il fatto che le frequenze che si trovano assumono la forma

$$\frac{3^i}{2^j}f$$

e l'equazione

$$\frac{3^i}{2^j}f = \frac{3^k}{2^l}f$$

ha solo la soluzione $i = k$, $j = l$.

Ma allora, come mai sul pianoforte c'è un solo tasto nero tra due tasti bianchi? E' il bemolle o il diesis? In realtà nessuno dei due...

La soluzione matematica per inserire 12 note equidistanziate nell'ottava è semplice: detto x il rapporto di frequenze tra due note consecutive, sempre lo stesso, dato che salire di x significa moltiplicare per x, le frequenze delle 12 note diventano x, x^2, ecc., fino a $x^{12} = 2$, cioè $x = \sqrt[12]{2}$, che però è un numero irrazionale, cioè non è il rapporto di due numeri interi. In questa scala, detta equabile, il rapporto delle frequenze di due note successive è $x = \sqrt[12]{2}$, in contrasto sia con l'intuizione pitagorica sia con la fisica del suono, che ci insegnano che l'armonia musicale si ha quando il rapporto delle frequenze è una frazione, e preferibilmente con numeratore e denominatore piccoli. In sostanza, col temperamento equabile tutti gli intervalli risultano "non accordati" allo stesso modo, cioè l'errore si distribuisce in modo uniforme.

Nella scala equabile teorica, l'intervallo di ottava è perfetto, quello di quinta, fondamentale nella scala pitagorica, è quasi esatto ($\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1,4983 \approx 1,5$), l'onda sonora $Do + Sol^e$ non è più periodica, almeno per l'onda teorica dato che i numeri irrazionali vengono in pratica approssimati con frazioni. Gli ultimi due grafici del file *grafici-onde* confrontano l'accordo giusto $Do + Sol$ (blu) e quello equabile (rosso), la differenza si apprezza meglio nell'ultimo grafico che rappresenta l'onda in un intervallo di tempo successivo.

La scala equabile è stata adottata per il pianoforte a causa del gran numero di ottave (7 + tre tasti bianchi e uno nero) che renderebbe troppo diverse le note tra gli estremi della tastiera se fossero accordate in modo pitagorico, e per altri strumenti ad accordatura fissa.

Dal punto di vista matematico, è indifferente il numero di note da inserire, con n note si troverebbe $x = \sqrt[n]{2}$ che è sempre un numero irrazionale; la scelta di dividere l'intervallo di ottava in 12 intervalli uguali, e non in un altro qualunque numero, nasce proprio dall'esperienza musicale millenaria, sostenuta dal pensiero pitagorico, che ha dato un ruolo importante al rapporto di frequenze $\frac{3}{2}$, determinando il processo costruttivo del "ciclo delle quinte", che determina la sequenza di 5 toni e 2 semitoni, e la necessità di inserire le alterazioni che porta a 12 il numero delle note.

Oltre alla scala pitagorica e a quella equabile, si possono considerare altri tipi di scale in uso nel passato e nel presente in diverse culture; ogni brano musicale andrebbe suonato utilizzando gli strumenti costruiti ed accordati in base alla scala musicale con cui è stato composto. Ad esempio, prima dell'adozione della scala equabile erano in uso i clavicembali con i tasti spezzati che permettevano di ottenere separatamente il diesis di una nota e il bemolle della nota successiva.

Rimanendo in Occidente, nel Cinquecento il teorico della musica Gioseffo Zarlino, spinto dalla ricerca di accordi consonanti per le terze e le seste che erano insoddisfacenti con la scala pitagorica, modificò la scala di Pitagora, accettando come base di partenza per la consonanza anche il rapporto di lunghezze $\frac{4}{5}$ delle corde, che corrisponde a un rapporto di frequenze di $\frac{5}{4}$, che egli usò per la nota Mi. La scala di Zarlino comprende 7 note di frequenze

$$Do_2 = 2 \quad \text{(ottava)}$$

$$Sol = \frac{3}{2} \quad \text{(quinta)}$$

$$Fa = \frac{4}{3} \quad \text{(quarta)}$$

$$Mi = \frac{5}{4} \quad \text{(terza)}$$

$$Re = \frac{9}{8} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} \quad \text{(seconda = quinta+quinta = quinta meno quarta)}$$

$$La = \frac{5}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \quad \text{(sesta = terza+quarta)}$$

$$Si = \frac{15}{8} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \quad \text{(settima = terza+quinta)}$$

Tale scala è detta scala naturale di Zarlino e impiega rapporti di frequenze espresse da frazioni aventi numeratori e denominatori che sono numeri "piccoli". Se calcoliamo l'ampiezza degli intervalli tra note successive, troviamo tra *Do* e *Re* un tono $T = \frac{9}{8}$ uguale a quello della scala pitagorica, tra *Re* e Mi un nuovo tono $T' = \frac{10}{9}$, tra Mi e Fa un nuovo semitono $S'' = \frac{16}{15}$, che si susseguono nell'ordine: $T - T' - S'' - T - T' - T - S''$.

Con questa scala anche le terze e le seste sono consonanti: ad esempio, utilizzando un generatore di tono, disponibile online, aperto su due diverse finestre del browser, si possono ascoltare simultaneamente l'accordo $La - Do_2$ con frequenze 440 Hz e 528 Hz (di Zarlino) oppure con frequenze 440 Hz e 522 Hz (pitagorico) e verificare la migliore consonanza dell'accordo naturale zarliniano.

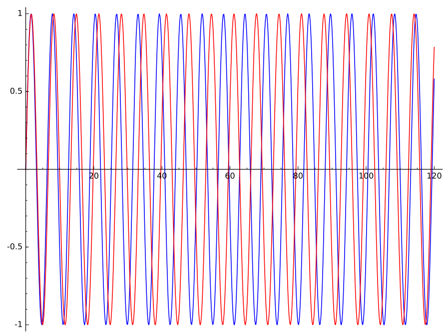
La teoria di Zarlino riprende la teoria di Archita (V secolo a.C.), dandole per la prima volta applicazione pratica. Si tratta di un sistema di accordatura basato sulla successione naturale dei suoni armonici, che era in linea, anche se inconsapevolmente, con l'esistenza degli armonici naturali, che sono prodotti dalla vibrazione sonora di uno strumento e che fu scoperta solo nel 1701 da Sauveur.

Infatti quando si produce una nota di una data frequenza f con uno strumento a corda o a fiato, vengono emesse anche infinite note, di minore intensità, la cui frequenza è un multiplo intero di f, che sono dette armoniche. Ad esempio il clarinetto, oltre alla nota fondamentale, produce le armoniche la cui frequenza è multiplo dispari della frequenza f, il violino produce tutte le armoniche, cioè quelle aventi frequenza kf per ogni k naturale. La differente gamma di armoniche conferisce a ogni strumento il suo proprio timbro che ne distingue il suono da quello prodotto dagli altri strumenti. Quindi quando ascoltiamo un Do di frequenza f prodotto da un violino, sentiamo ad esempio anche le armoniche di frequenze $2f$, $3f$, $4f$, $5f$, $6f$, ecc., che corrispondono a Do_2, $Sol_2(3 = 2\frac{3}{2})$, Do_3, Mi_3 di Zarlino $(5 = 4\frac{5}{4})$, $Sol_3(6 = 4\frac{3}{2})$. I primi sei armonici del violino danno origine alle note Do, Mi, Sol della scala naturale di Zarlino o, viceversa, la scala di Zarlino si basa sui primi sei armonici.

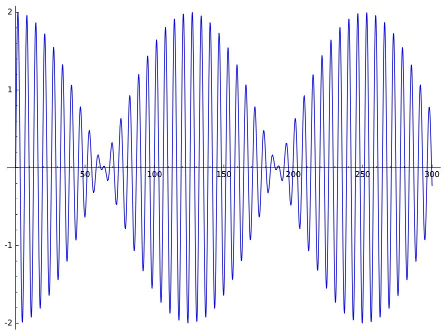
La presenza delle armoniche rinforza la consonanza che il nostro orecchio percepisce tra note che distano un'ottava o una quinta, ecc.

Interessante sia per la musica che per la fisica e la matematica è il fenomeno dei battimenti, che si produce quando si suonano contemporaneamente due note aventi frequenze molto vicine. Utilizzando un generatore di tono online aperto su due diverse finestre del browser, e producendo simultaneamente un La di frequenza 440 Hz e un secondo suono di frequenza via via crescente, 441 Hz ... ecc., si percepisce chiaramente un susseguirsi di periodici rinforzamenti e indebolimenti del suono, che sono detti battimenti. Il numero di battimenti al secondo cresce fino a quando si raggiunge la frequenza di 466 Hz ($La^\sharp$), poi si vira verso un suono ruvido (Si). La sgradevolezza dell'effetto spiega quanto sia importante la perfetta accordatura degli strumenti. I battimenti sono ineliminabili dal suono delle campane, per il fatto che esse presentano spessori diversi in zone diverse.

Per visualizzare un'onda sonora che produce battimenti, nel grafico seguente sono rappresentate due onde (rossa e blu) di frequenze molto vicine; si può notare che sono quasi sovrapposte (in fase) all'inizio e intorno al valore 120 sull'asse delle ascisse, mentre sono in opposizione di fase intorno a 60 sull'asse delle ascisse (la rossa raggiunge il massimo quando la blu raggiunge il minimo, così si annullano).



Nel grafico seguente è rappresentata l'onda risultante che è molto intensa intorno a 0 e a 120, e quasi nulla intorno a 60; è questa la causa dell'alternarsi di rinforzamenti e indebolimenti del suono.



Per capire per quale motivo frequenze vicine generino onde di questo tipo ci vengono in aiuto le formule di prostaferesi, in particolare:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Se $p \approx q$, $\frac{p+q}{2} \approx p$, $\frac{p-q}{2} << p$ e percepiamo l'effetto di un'onda sinusoidale di frequenza $\frac{p+q}{2}$, la cui ampiezza (dalla quale dipende l'intensità del suono) è modulata da un'onda cosinusoidale di bassa frequenza, responsabile della lunga durata dei tempi dei rinforzamenti e indebolimenti del suono, che ce li rende percepibili.

Si è finora dato molto rilievo all'importanza della consonanza in musica, ma a partire dal XX secolo alcuni compositori hanno scelto deliberatamente la dissonanza come mezzo espressivo (tra essi Schoenberg). E' passato alla storia l'inno americano dissonante suonato da Jimy Hendrix a Woodstock nel 1969 in segno di protesta per la guerra in Vietnam. Paradossalmente pare che l'attuale presidente degli USA, Donald Trump, apprezzi l'inno americano suonato in modo dissonante, certamente non sulla base delle stesse motivazioni politiche di Jimy Hendrix.

Le scale musicali possono anche essere impiegate per mostrare agli studenti un'applicazione dei logaritmi. Infatti per misurare le frequenze dei suoni è conveniente usare una scala logaritmica. A questa considerazione può essere didatticamente interessante far pervenire gli studenti per due diverse strade:

1) Il fatto che l'ampiezza di un intervallo musicale sia determinata dal rapporto delle frequenze delle note ai suoi estremi rende naturale usare una scala logaritmica per le frequenze, in virtù della proprietà dei logaritmi

$$\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \log f_2 - \log f_1$$

che permette di definire ampiezza dell'intervallo come differenza: $\log f_2 - \log f_1$.

2) si può proporre loro di immaginare come definire una distanza tra note; definire la distanza come rapporto delle frequenze crea il problema che la distanza di una nota da se stessa sarebbe uguale a 1 e non a 0, come si può rimediare? Gli studenti possono intuire di calcolare il logaritmo, dato che $\log 1 = 0$. Dalle proprietà dei logaritmi segue la subadditività e, come per i numeri reali, anche l'additività se la nota che appare come intermedia nella formula ha frequenza intermedia tra le altre due.

Dato che nella scala equabile a ogni intervallo di semitono corrisponde il rapporto di frequenze $\sqrt[12]{2}$, due note che distano di n semitoni hanno rapporto delle frequenze $\frac{f_2}{f_1} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n$, da cui si ricava la formula che esprime il numero di semitoni che separano due note in funzione delle loro frequenze

$$n = 12 \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right).$$

Nel 1880 il musicologo e matematico inglese Alexander Ellis introdusse una suddivisione più fitta per valutare anche le piccole differenze di intonazione: il *cent*, che corrisponde alla milleduecentesima parte di un'ottava, quindi la formula per determinare la distanza in cents fra due note è

$$m = 1200 \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right).$$

Bibliografia e sitografia

Benson Dave, Music: *A Mathematical Offering* (disponibile online)
Isola S., *Su alcuni rapporti tra matematica e scale musicali*, Matematica, Cultura e Società - Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol, 1, N. 1 (2016), pp. 31–49.
https://www.youtube.com/watch?v=Au2QFQ2ppyg (spirale delle quinte)
http://www.szynalski.com/tone-generator/ (generatore di toni online)
https://www.youtube.com/watch?v=MKvnQYFhGCc (inno americano dissonante)