L’idea di curva e superficie

dall’astrazione matematica alla realizzazione fisica

Marco Andreatta

Professore di Geometria, Università di Trento

Presidente MUSE, Museo di Scienze di Trento

Platone 427-347 a.C.

Platone: il mito della caverna

Papiro di Ossirinco I-IV secolo d.C

Primo Libro Elementi di Euclide

Definizioni

Def. 1 Un punto è ciò che non ha parti

Def 2. Una linea è lunghezza senza larghezza

Def 4. Una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti (geodetica)

Def 15 Cerchio è una figura piana compresa da una sola linea, tutte le rette che incidono sulla quale, condotte da un solo punto tra quelli che sono posti all'interno della figura, sono uguali tra loro.

Postulati

1. Tracciare una retta da un punto a un altro punto.
2. Prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in una retta
3. Descrivere un cerchio con dati centro e raggio
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro
5. E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti

La retta (Geometry for the Classroom, Clemens)

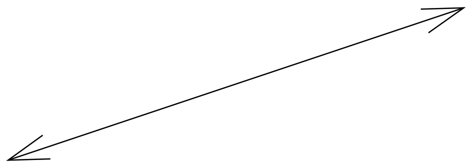
Una retta è un oggetto a priori caratterizzato dalle proprietà:

i) Si estende all' infinito in due direzioni

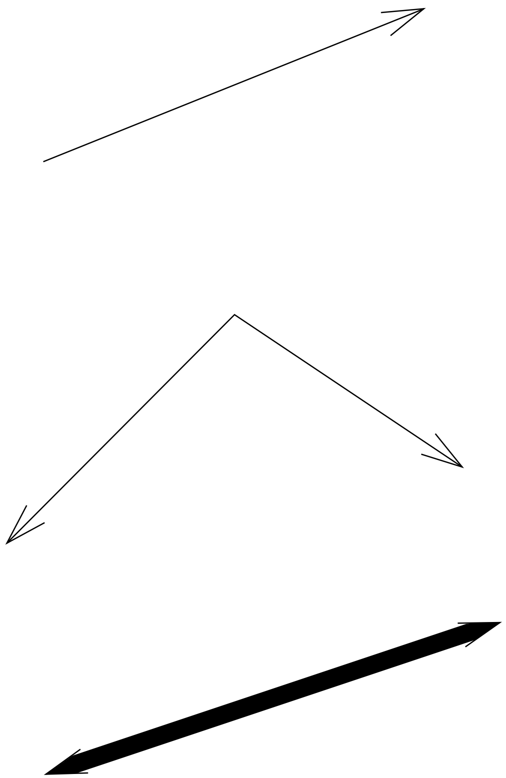
ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti

iii) dati due punti su una retta il cammino più breve per andare da un punto all'altro è dato dalla retta stessa (la retta è una geodetica)

iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.



retta



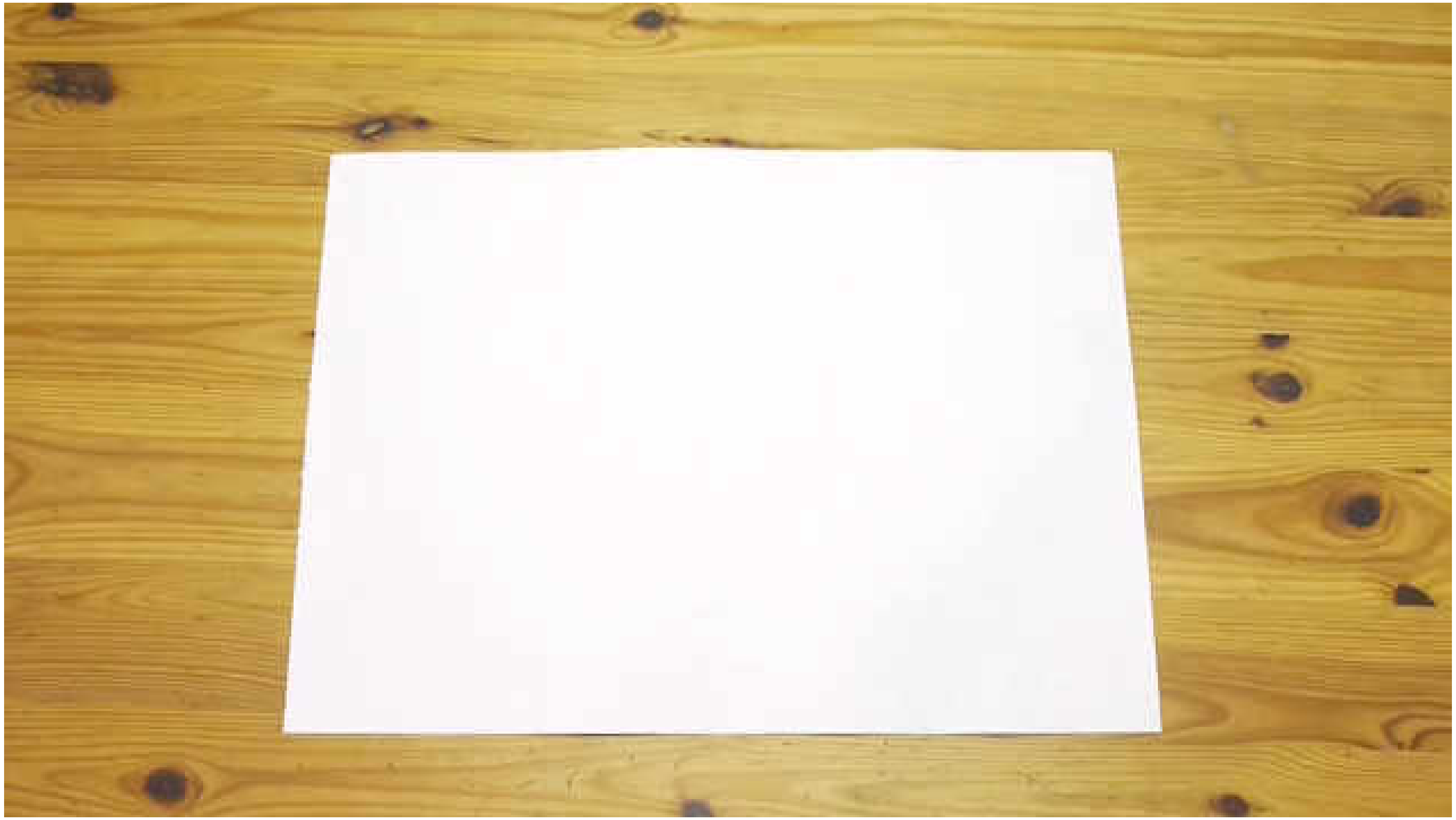
non rette

Scuola di Atene - Raffaello

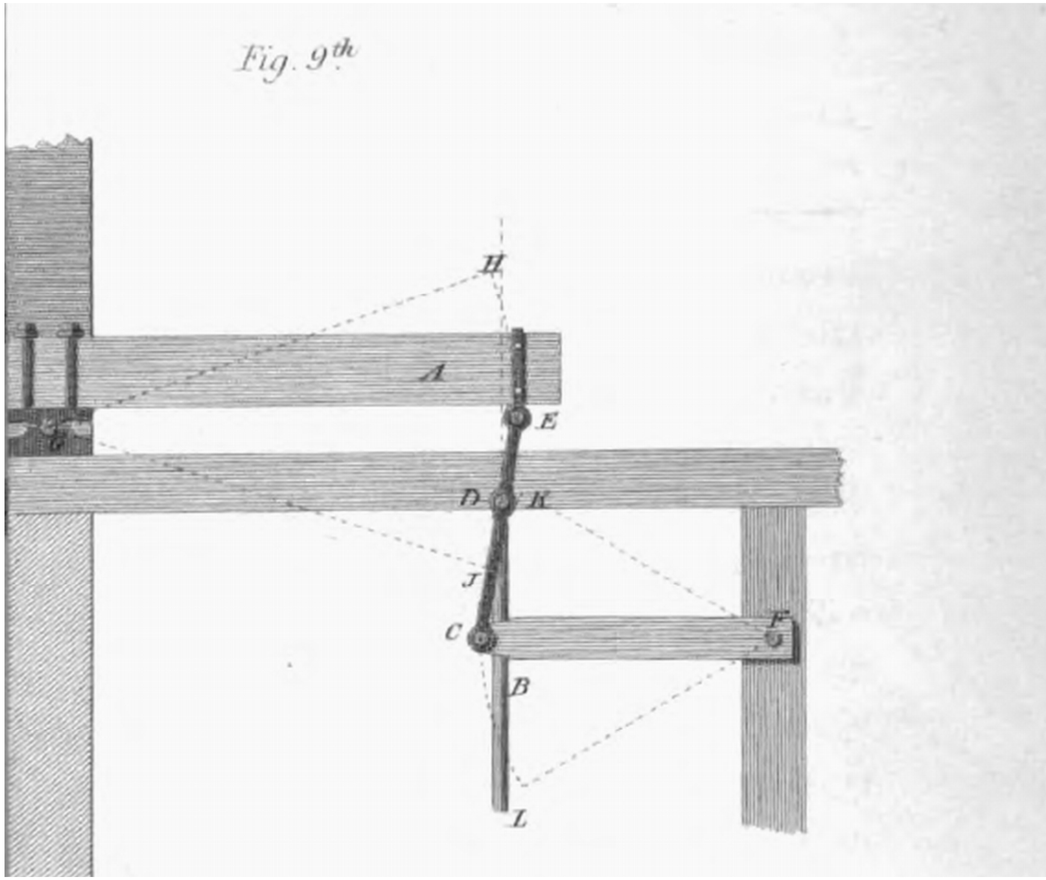
Giotto stupisce Cimabue, da YouTube

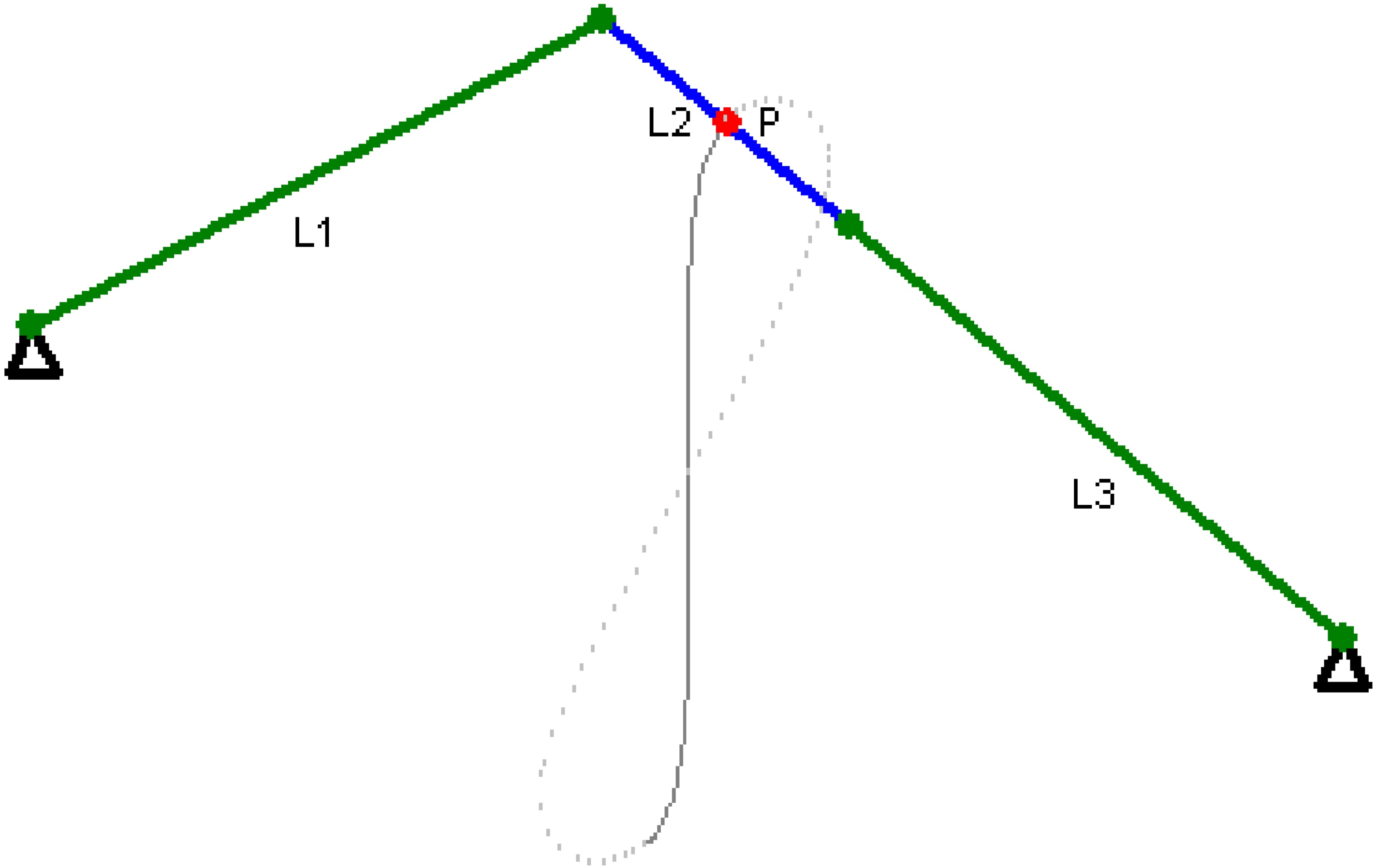
- : https://www.youtube.com/watch?v=zR3wbEudD1I

Giotto stupisce Cimabue, da YouTube

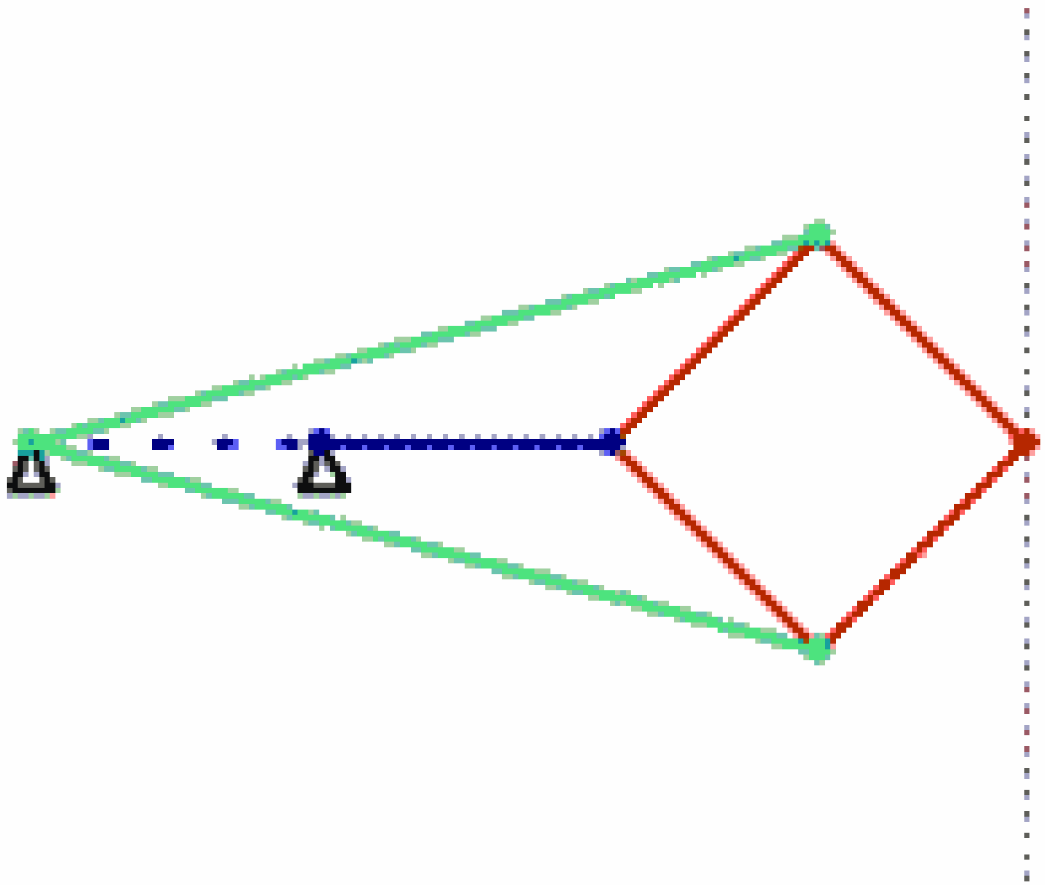


James Watt - brevetto (1784)



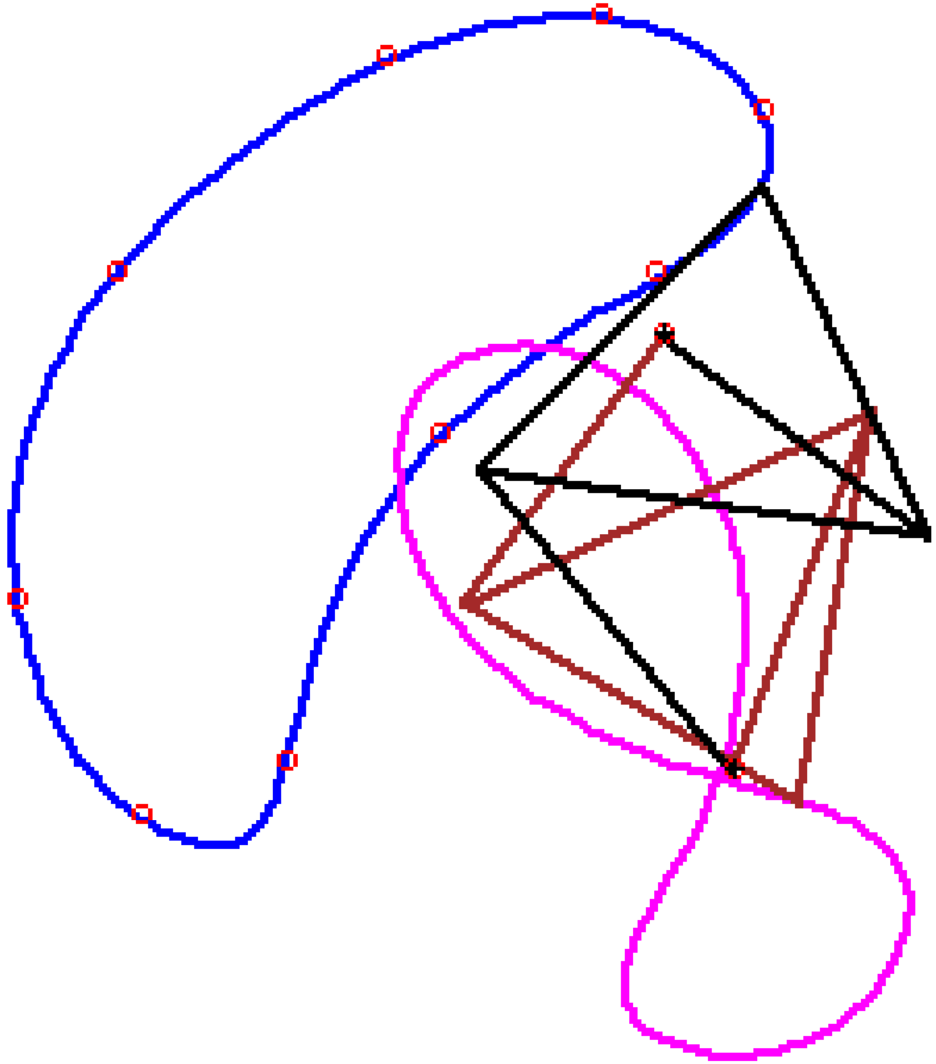

L2
P
L1
L3

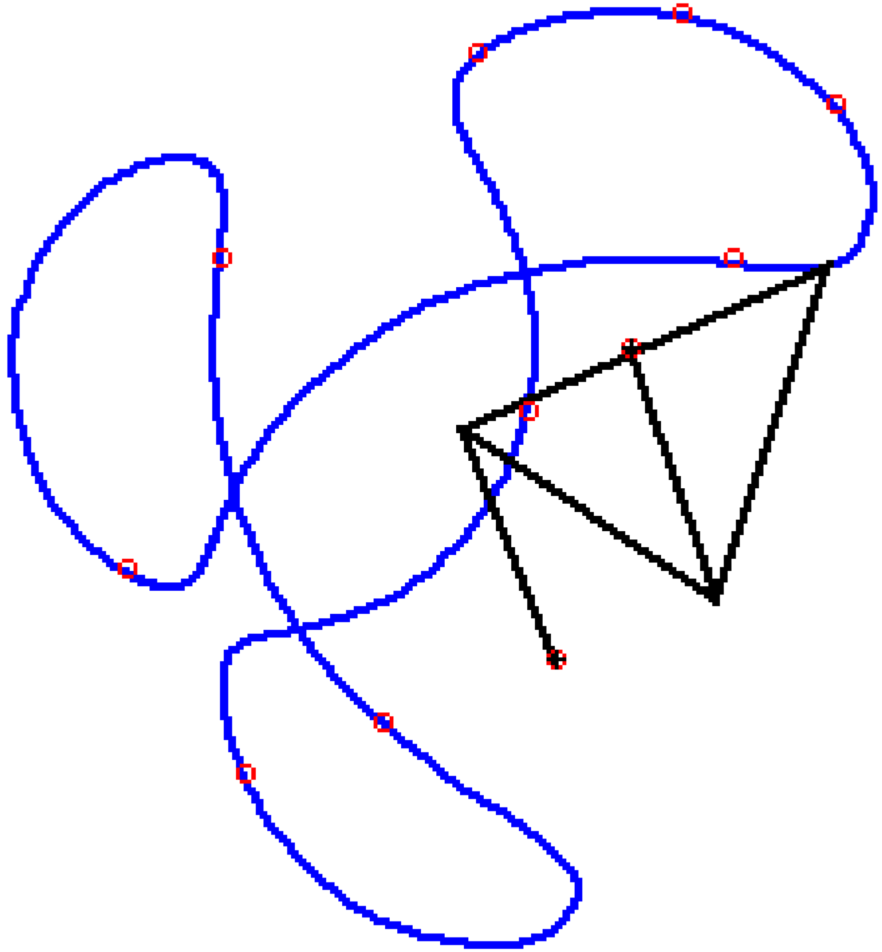
G. N. Peaucellier (1832-1913)

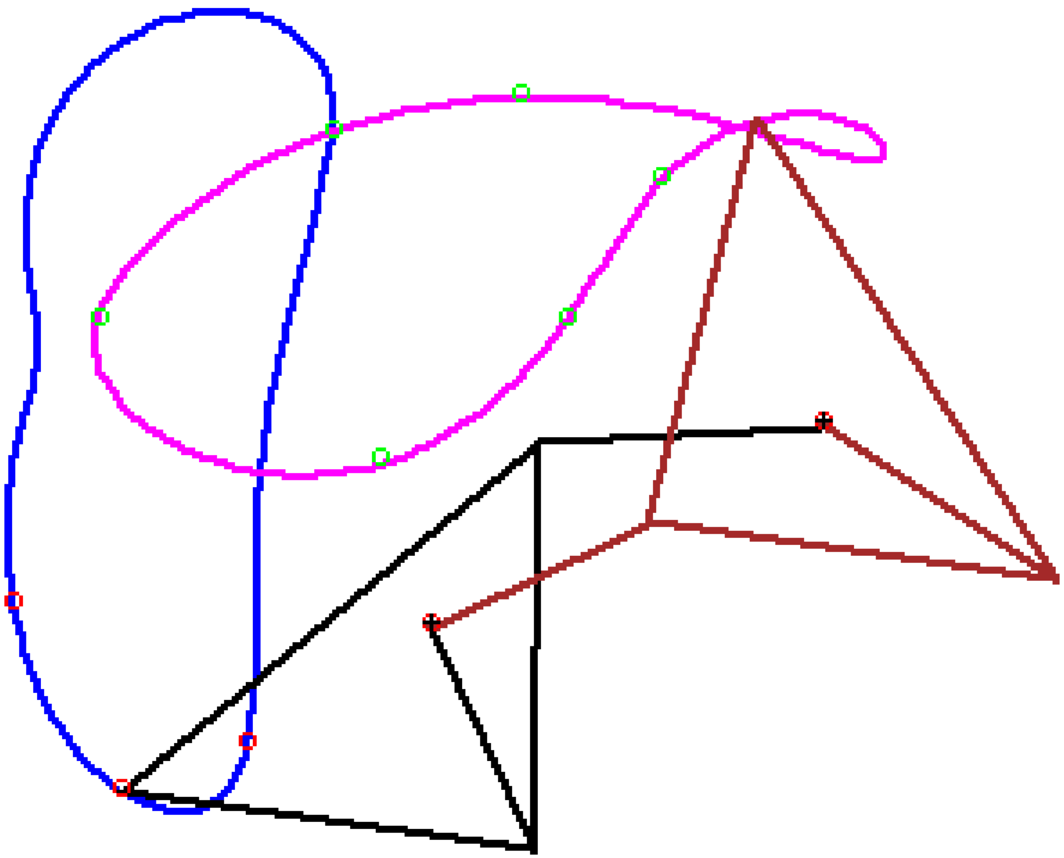


Teorema di Kempe (1876)

Ogni curva algebrica piana può essere disegnata (costruita) con un meccanismo articolato







Wiper Linkage

OEM#: 5485175

LACETTI/OPTRA

Costruzioni con riga e compasso, dai greci a Mascheroni

Mascheroni 1750-1800
Geometria del Compasso

Federigo Enriques, 1871-1946

lineo (nella posizione P) considerando l'angolo della tangente a C in P con la tangente in un punto vicino P_1, dividendolo per l'arco PP_1, e passando al limite per P_1 tendente a P. Si definisce così una *prima curvatura* $1/r$, o *flessione*, di C in P; r ne è il *raggio di prima curvatura* o *di flessione*; r è pure il raggio del *circolo osculatore*, il quale sta nel piano osculatore (v. CURVE) e si definisce mediante tre punti di C che tendono a P; la retta perpendicolare al piano osculatore nel centro di detto circolo è l'*asse di curvatura*, ed è la posizione limite della retta comune ai piani normali a C in P e P_1 quando P_1 tende a P su C. La stessa costruzione, applicata ai piani osculatori di C anziché alle tangenti, cioè, che fa lo stesso, alle *binormali* di C, che sono le perpendicolari ai piani osculatori nei rispettivi punti di C, conduce a definire una *seconda curvatura*, o curva), e che misura la rapidità con cui C si scosta in P dall'andamento piano; ϱ è il *raggio di seconda curvatura, o di torsione*, di C in P. Ripetendo ancora la stessa costruzione per le normali principali di C si trova una *curvatura totale* $1 : R$, che non dà nulla di nuovo, perché $1 : R^2 = 1 : r^2 + 1 : \varrho^2$. La linea C è nota di forma e di grandezza quando ne siano date le *equazioni intrinseche* $r = r(s)$, $\varrho = \varrho(s)$, che esprimono r, ϱ in funzione dell'arco s.

Si può giudicare della curvatura d'una superficie S in un suo punto P conoscendo quella delle linee tracciate su S e uscenti da P nelle varie direzioni; basta anzi considerare le *sezioni normali*, cioè le linee piane che si hanno tagliando S coi piani che passano per la normale n ad S in P; occorre però scegliere su n un senso positivo, e quindi attribuire un segno $+$ o $-$ al raggio di curvatura R di una sezione normale secondoché essa è concava, in P, dalla parte della normale positiva oppure dalla parte opposta. Studiando allora come varia R al variare della sezione normale corrispondente, si trova che R ammette un valor massimo ed un valor minimo (da intendersi in senso relativo), R_1 e R_2; e questi due valori spettano a due sezioni normali fra loro perpendicolari, le *sezioni normali* diante le due curvature principali $1/R_1$ e $1/R_2$ dalla formula (di Eulero): $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \vartheta}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{R_2}$. Il prodotto $K = 1/(R_1 R_2)$ si chiama la *curvatura totale* di S in P (K. F. Gauss, 1827). La forma di S in un piccolo intorno di P dipende dal segno di K; secondoché $K \gtrless 0$, cioè secondoché i segni di R_1 e R_2 sono eguali o opposti, detta forma è quella di un ellissoide o di un iperboloide ad una falda. Come caso intermedio, se $K = 0$, cioè se è nulla in P una delle curvature principali, S ha in P la forma di un cilindro. Nei tre casi P si dice rispettivamente *punto ellittico, iperbolico, parabolico*. Il valore di K non muta se S si flette, come se fosse un tessuto flessibile e inestensibile, senza strappi né stiramenti né contrazioni. Si può dare di K il seguente significato intrinseco: considerato su S un *triangolo geodetico*, ossia un triangolo i cui lati siano linee geodetiche, la differenza tra la somma degli angoli del triangolo e π (*eccesso geodetico* del triangolo) vale $\int K d\sigma$ esteso all'area del triangolo (teor. di Gauss). In particolare, sulle *superficie a curvatura totale costante*, come il piano, la sfera e la pseudo-

$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Essa è nulla per le *superficie ad area minima* (v. SUPERFICIE: Superficie notevoli).

Si può estendere (Riemann, 1854) la nozione della curvatura a una varietà V con più di tre dimensioni, sulla quale si suppone dato un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e assegnato inoltre l'*elemento lineare*, ossia l'espressione del quadrato ds^2 della distanza infinitesima ds di due punti di V infinitamente vicini e di coordinate $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e $u_1 + du_1, u_2 + du_2, \ldots, u_n + du_n$:

$$ds^2 = \Sigma\, a_{ik}\, du_i\, du_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

In tali ipotesi sono definite su V le linee geodetiche; sicché se si prendono due geodetiche uscenti da un punto $P(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di V secondo due direzioni distinte, che vadano da P ai punti infinitamente vicini $u_1 + du_1, \ldots, u_n + du_n$ e $u_1 + \delta u_1, \ldots, u_n + \delta u_n$, riesce definita una *superficie geodetica* S uscente da P, ossia la superficie ricoperta dalle geodetiche uscenti da P nelle direzioni che vanno da P a tutti i punti $u_1 + \lambda du_1 + \mu \delta u_1, \ldots, u_n + \lambda du_n + \mu \delta u_n$; la curvatura totale K di S in P dipende in generale da P e da S, e si chiama la *curvatura di V nel punto P e secondo la giacitura della superficie S*. Se, per ogni singola posizione di P su V, essa non dipende dalla superficie geodetica F che si è fatta passare per P, cioè se essa è *localmente* costante, allora essa riesce indipendente anche da P e ovunque costante su V, la quale si chiama allora una varietà a curvatura costante (teor. di F. Schur).

BIBL.: Oltre i trattati di geometria differenziale, ad es. di L. Bianchi, di G. Darboux, di W. Blaschke, ecc., si veda anche: T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, redatte da E. Persico, Roma 1925, cap. VII. E. G. T.

CURVE. – Nell'uso comune della parola, « curva » significa linea non retta e non composta di linee rette. Già Parmenide d'Elea, secondo Proclo nel *Commento all'Euclide*, distingueva le linee in rette, curve e miste. Ma nell'evoluzione del linguaggio matematico, che tende sempre ad eliminare le eccezioni affermando una veduta di continuità, la parola « curva » è divenuta sinonimo di « linea ». oltre il cerchio: in primo luogo le coniche, e poi le curve d'ordine superiore usate per la soluzione del problema della trisezione dell'angolo o della duplicazione del cubo, cissoide di Diocle e concoide di Nicomede, e poi ancora la quadratrice di Ippia e Dinostrato, la spirale d'Archimede, ecc. Queste curve hanno offerto occasione a trattare diversi problemi (concernenti le tangenti, i massimi e minimi), che la geometria moderna ha risoluto in una maniera generale, e che stanno alla base del calcolo differenziale.

1. *Sulla definizione di curva.* – Nell'antica scuola di Pitagora (fondata il 540 a. C.) la linea si pensava costituita di punti-monadi, corpiccioli elementari di piccola estensione: da questa veduta, che risponde ad una conoscenza empirica non ancora razionalizzata, traevano i Pitagorici diverse conseguenze importanti, e in primo luogo la possibilità della misura delle linee. Ma la teoria andò incontro ad una crisi in seguito alla scoperta degl'incommensurabili, fatta nella stessa scuola.

Si approfondì allora dagli Eleati (Parmenide e Zenone d'Elea) l'analisi del concetto degli enti geometrici, e si riuscì a capire che essi hanno un significato puramente ideale: il punto è senza esten-

La discussione intorno all'esistenza di tali figure matematiche era viva in Grecia nella seconda metà del sec. V a. C. Sofisti, come Protagora d'Abdera, sostenevano che le vere linee hanno una certa larghezza e differiscono perciò dal concetto dei matematici; così il cerchio deve avere, non un punto, ma un piccolo tratto a comune con la tangente. Si trova qui una veduta empirica, cui consente Aristotele, e che sarà conservata dalla tradizione degli scettici, raccolta più tardi nel libro *Adversus geometras* di Sesto Empirico. Frattanto i filosofi razionalisti, ispirati dalle matematiche – Democrito e Platone – sostenevano, contro gli empirici, la realtà degl'Intelligibili o delle Idee: idea = ἰδέα significa originariamente schema o figura matematica.

I tentativi per chiarire il concetto generale della linea, nel secolo IV a. C., conducono ad alcune definizioni che ci sono riportate da Platone e Aristotele: definizione genetica della linea come luogo d'un punto che si muove, e definizione delle linee come termini delle superficie. La prima si ritrova in Proclo (ed. Friedlein 1873, p. 97) e in Pappo (ed. Hutltsch, 1877, II, p. 662). La seconda

polemica eleatico-pitagorica.

Le anzidette definizioni sono passate nell'insegnamento tradizionale della geometria; ma anche prima di arrivare alla critica contemporanea, il pensiero matematico doveva riconoscerne l'imprecisione e l'insufficienza. Così nell'*Encyclopédie* (nuova ed., IX, Ginevra 1777, p. 758), D'Alembert dice che la linea è un concetto fondamentale non ulteriormente spiegabile: per chiarire questo concetto generale conviene assumere come data la nozione di linee e superficie particolari, cioè della retta, del piano, ecc.

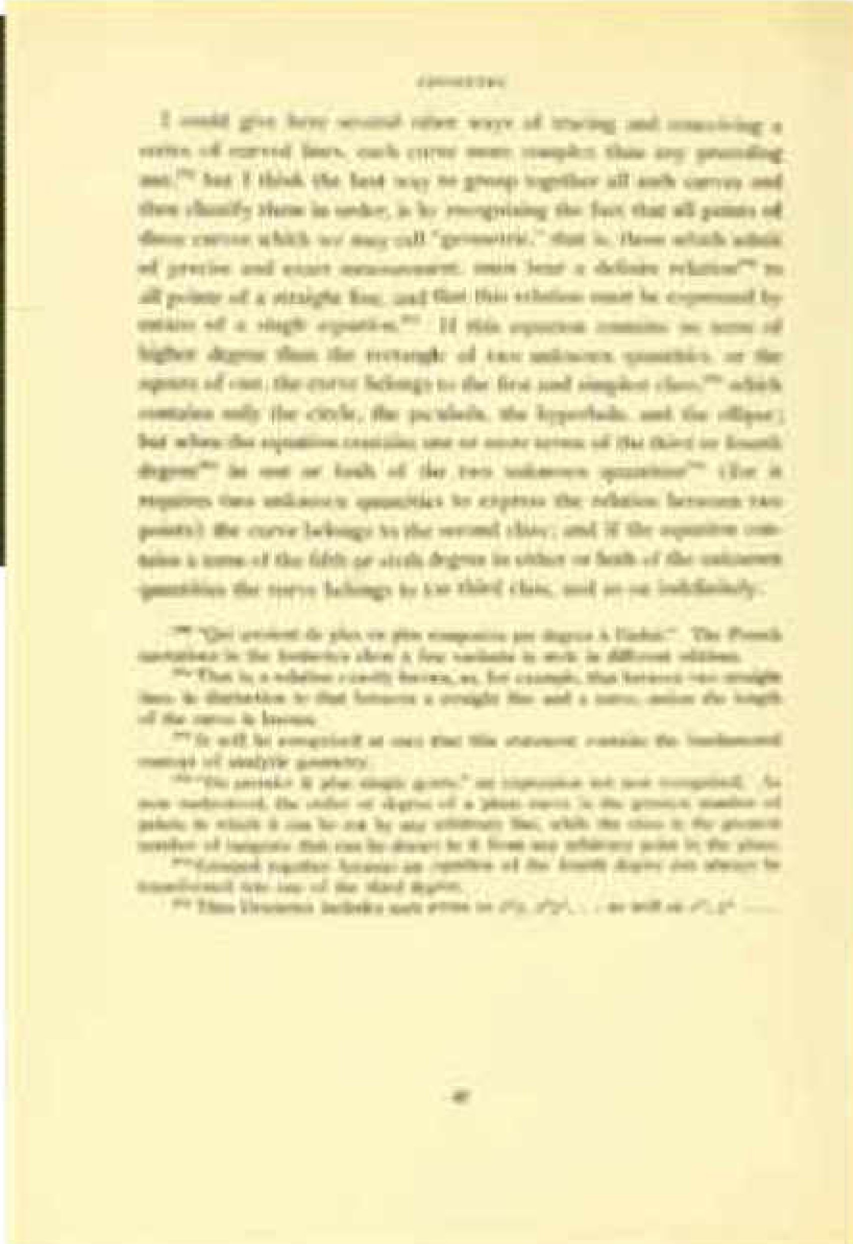
L'intero sviluppo delle matematiche moderne conduce a tale chiarimento. Ed in questo figura come essenziale il metodo della geometria analitica di Fermat e Descartes (*La géometrie*, 1637).

Riferiamoci per semplicità alla geometria del piano, e assumiamo in questo un sistema di assi cartesiani x, y (v. COORDINATE). La generazione meccanica della curva porta ad esprimere le coordinate d'un suo punto variabile come funzioni d'un parametro t (tempo):

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

René Decartes, 1596-1650

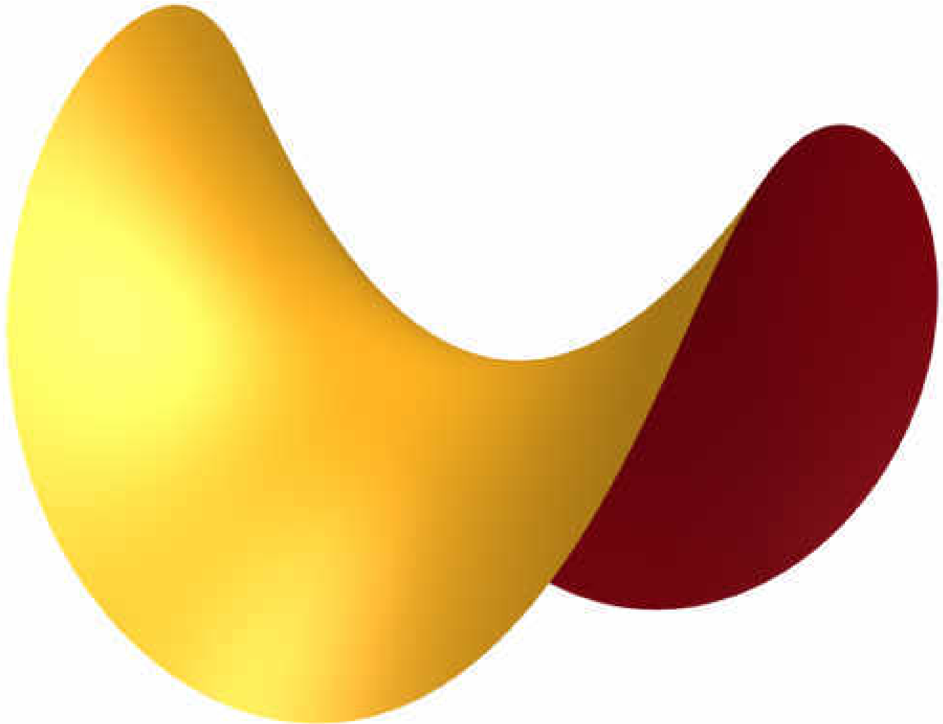
La Geometrie



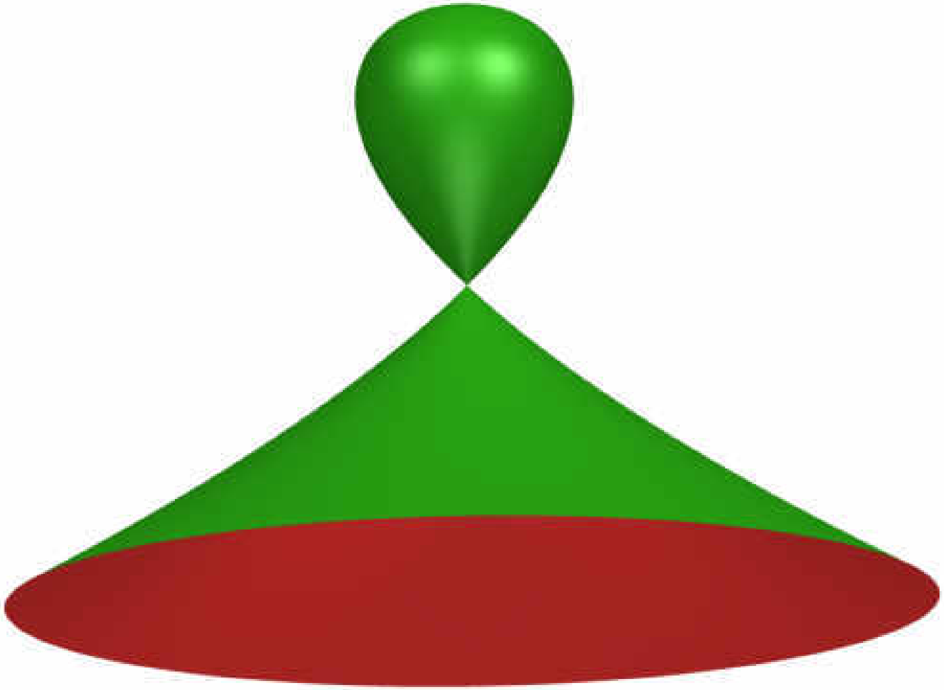
FabLab – stampanti 3D e taglierine laser

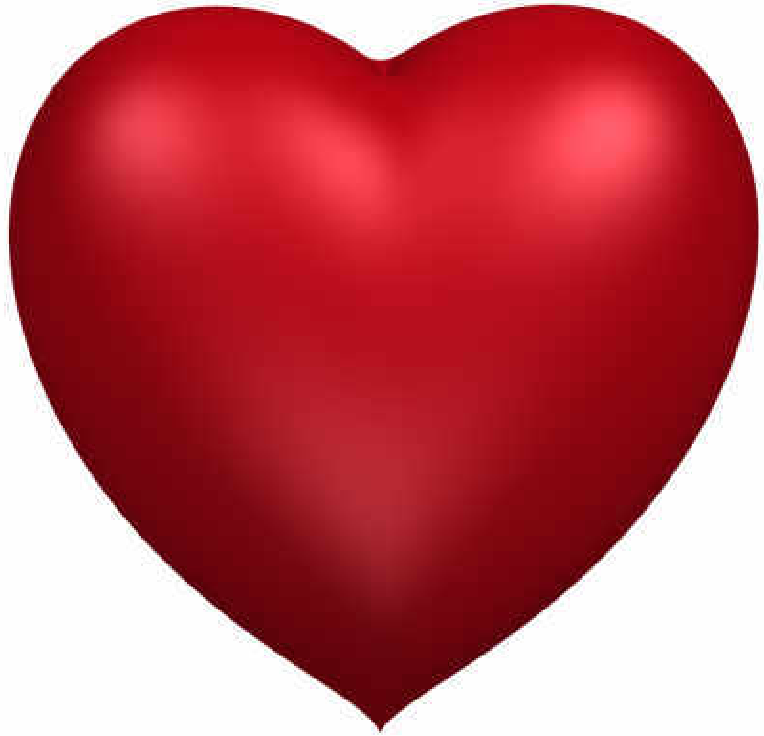
Surfer

Iperboloide iperbolico



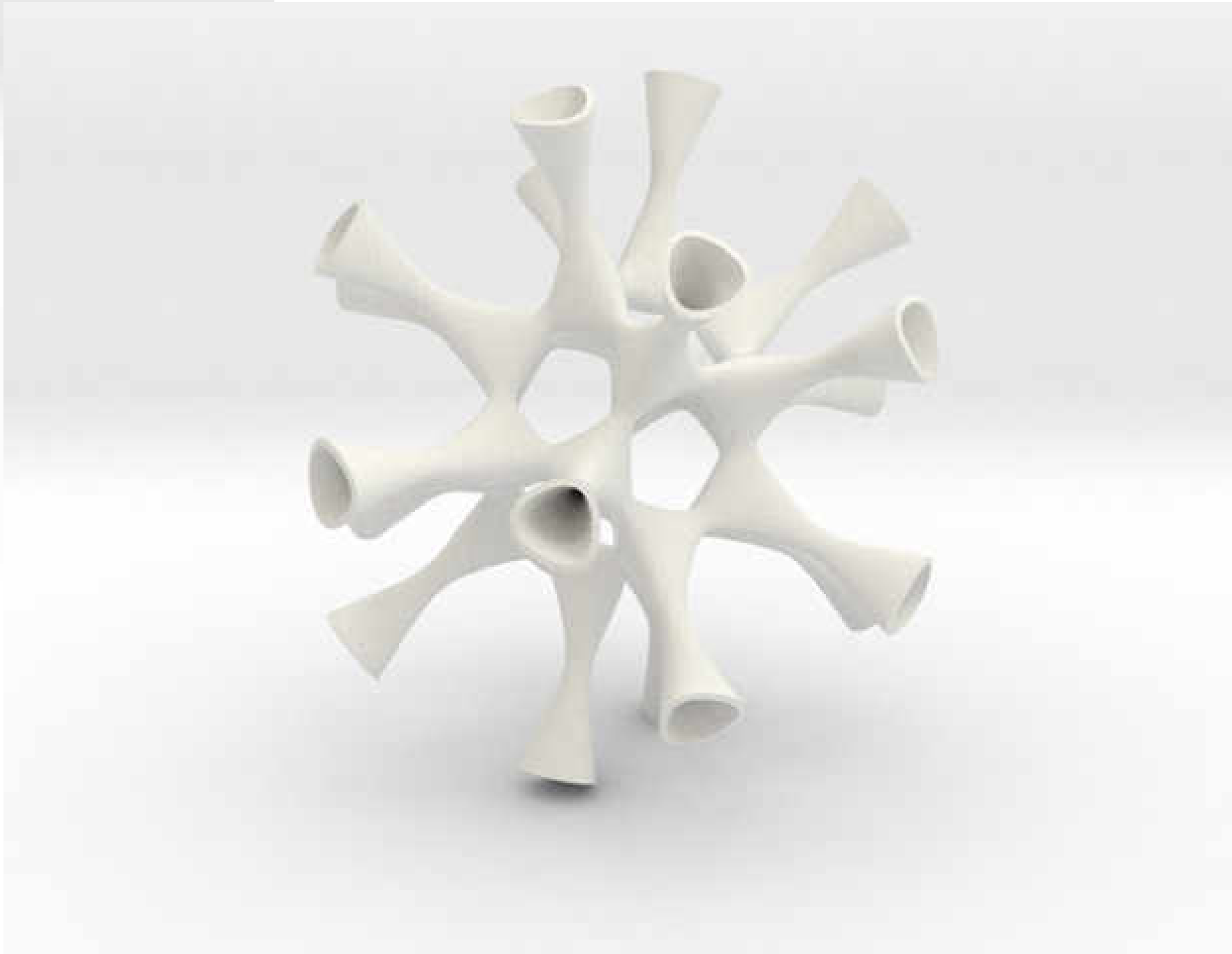
Paraboloide Iperbolico





superficie del Dini (Beltrami)

sestica di Barth



Oliver Lab

http://math-sculpture.com/

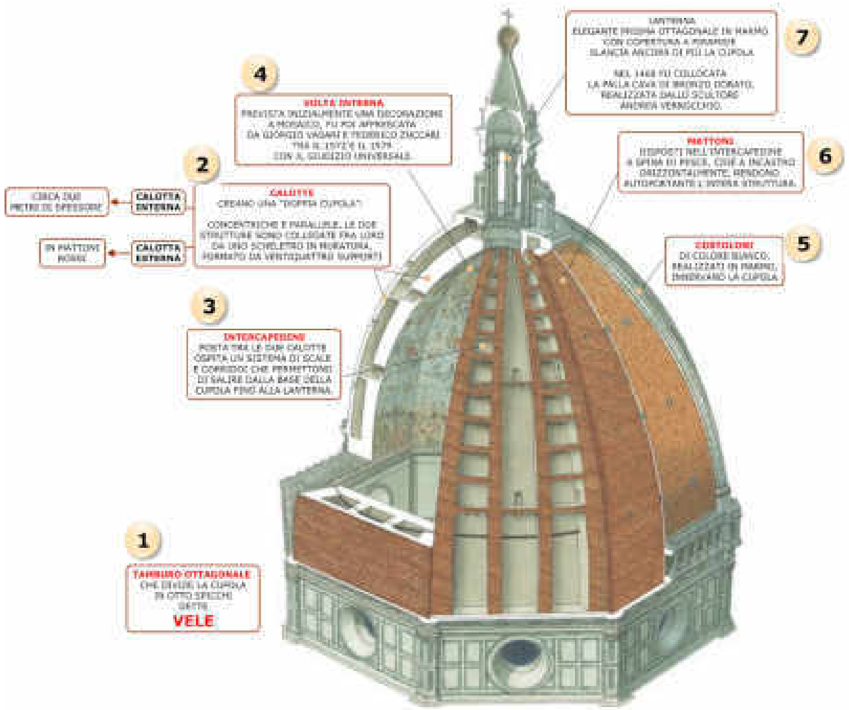
https://imaginary.org/gallery/oliver-labs

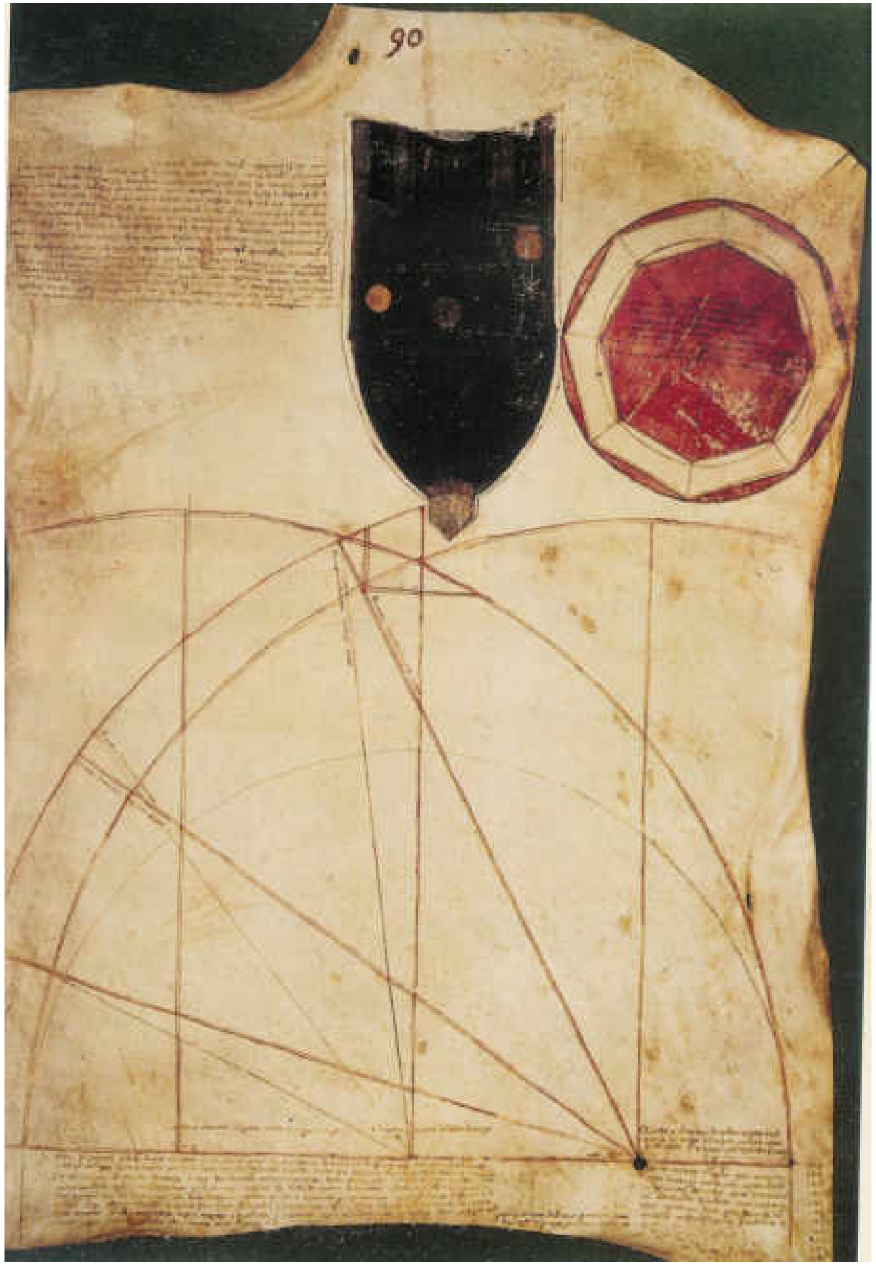
Superfici cubiche

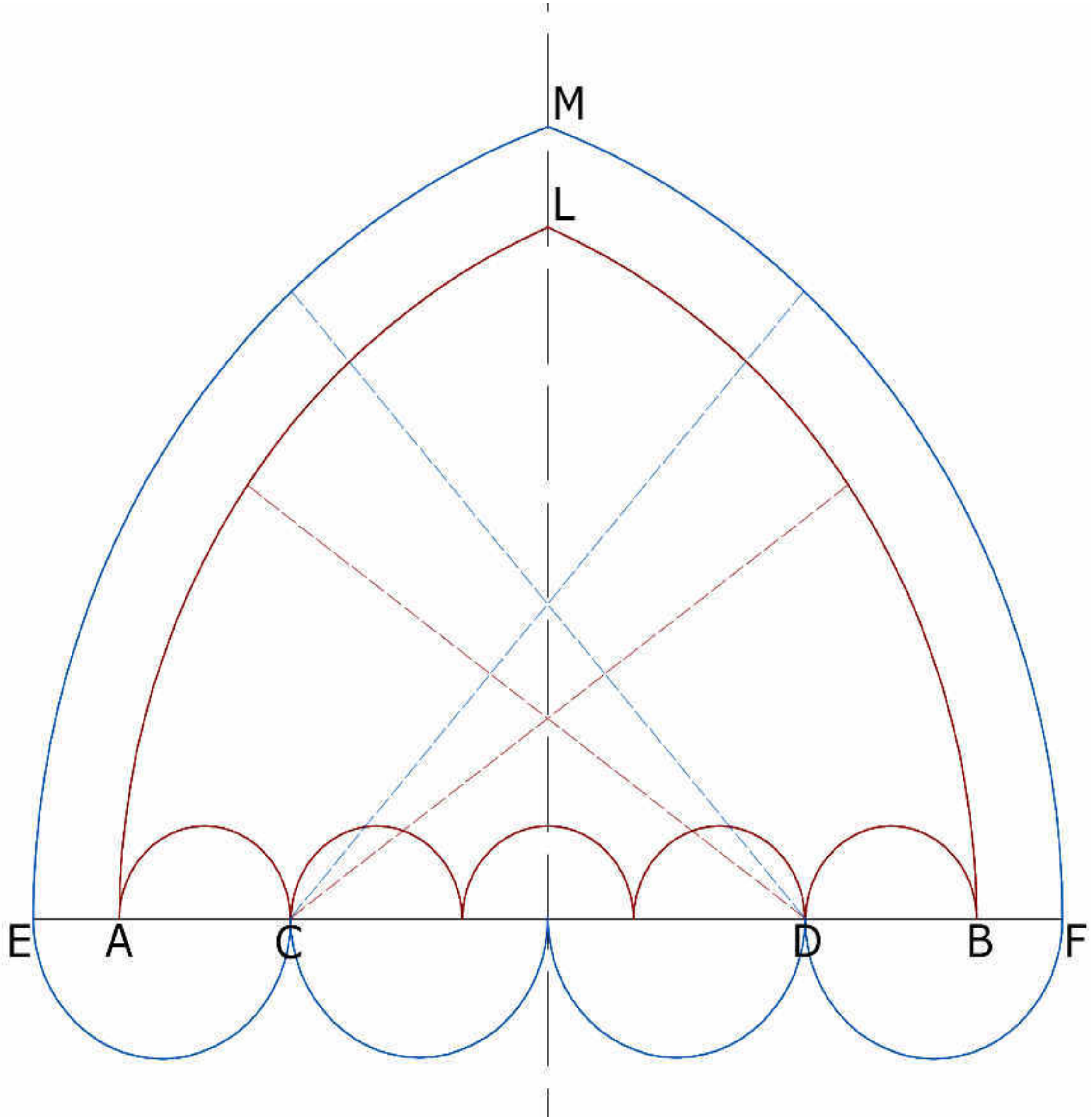
http://www.museoscienza.org/

http://math-sculpture.com/

Catenaria – da Brunelleschi a Wembley



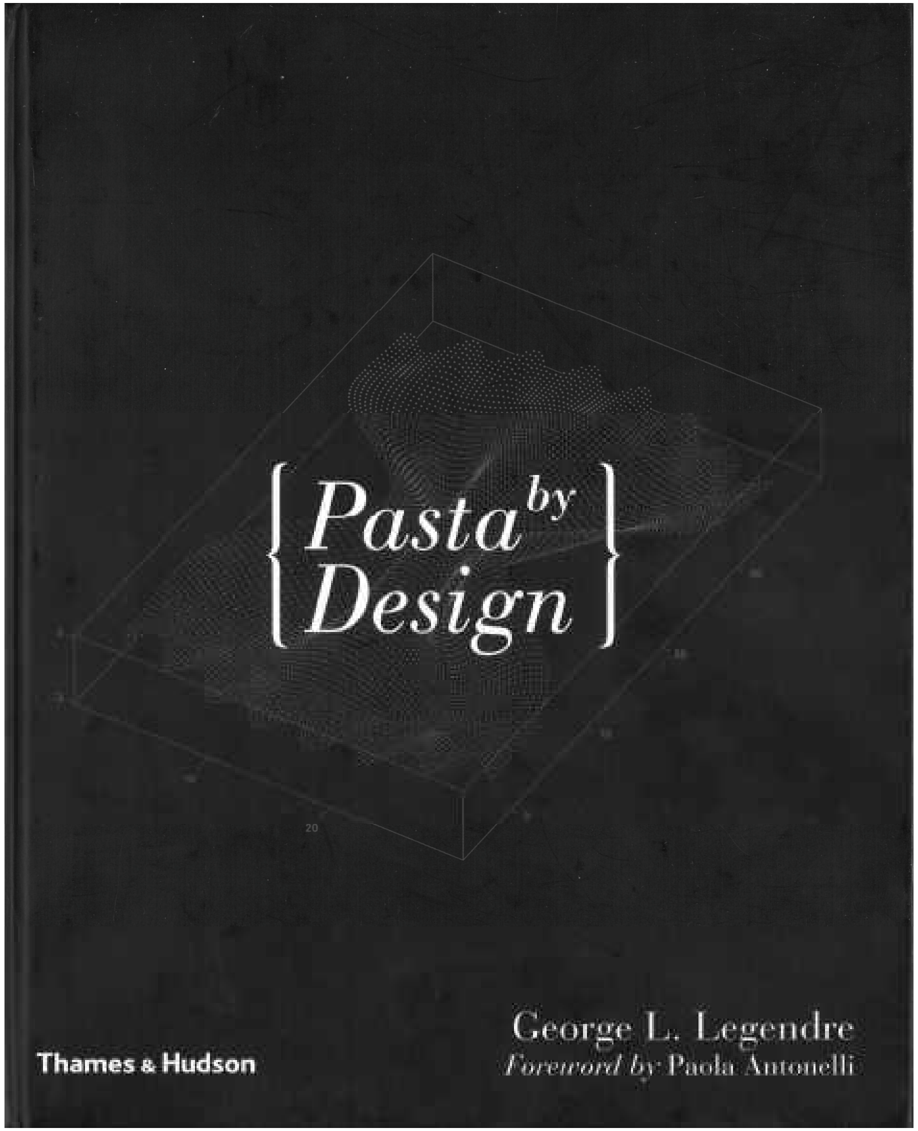

90


M
L
E
A
C
D
B
F

bottiglia di Klein

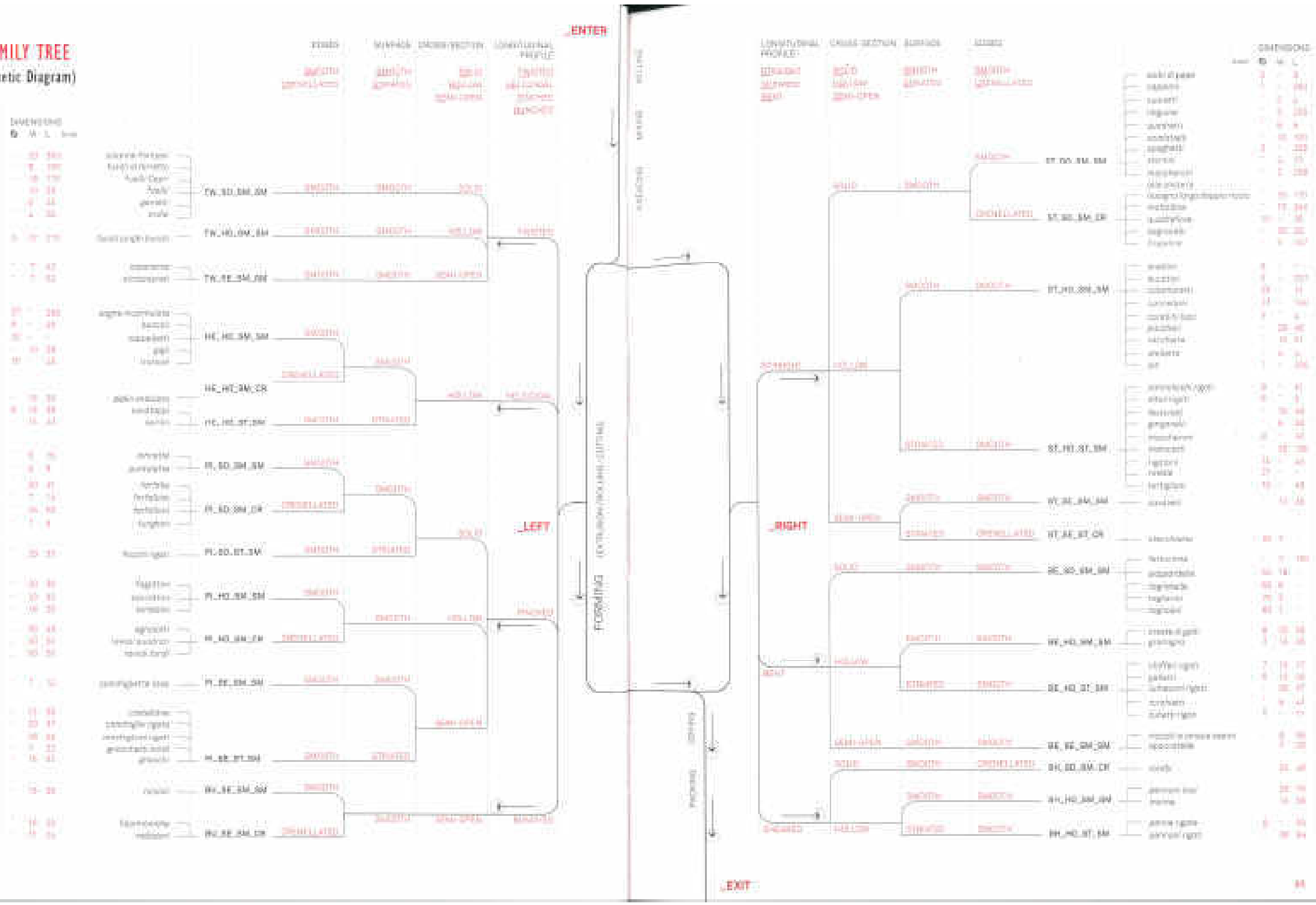

ASSEMBLATI
10.251

David Press at MOMATH
https://shop.momath.org/arts-david-press-tensegrity-string-sculpture-kit.html


Pasta by Design
George L. Legendre
Foreword by Paola Antonelli
Thames & Hudson

THE FAMILY TREE

(Phylogenetic Diagram)



THE ARCHITECTURE OF PASTA: A USER'S GUIDE

A speciality of the northern Italian region of Emilia-Romagna, *gramigna* (little weed) are traditionally served with a chunky sauce of sausages, or accompanied by the world-famous *ragù alla bolognese*. Alternatively, *gramigna* are sometimes presented *alla pomodoro* (with a light tomato sauce).

- BENT LONGITUDINAL PROFILE
- HOLLOW CROSS-SECTION
- SMOOTH SURFACE
- SMOOTH EDGES

A brief text explaining the etymological and historical derivation of the pasta, as well as giving example dishes. Unless otherwise stated, ingredients are durum wheat flour and water.

_ranges

$i = 0, 1 \ldots 25$

$j = 0, 1 \ldots 150$

A range is a series of numbers used in the equations. There are two ranges, arbitrarily named i and j. Ranges vary between 0 and 1 – or any multiple thereof.

_equations

$$\Omega_{i,j} = \left[0.5 + 3.6\left(\frac{j}{150}\right)^2 + 0.5\cos\left(\frac{2\cdot i}{25}\cdot\pi\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{1.1\cdot j}{150}\cdot\pi\right)$$

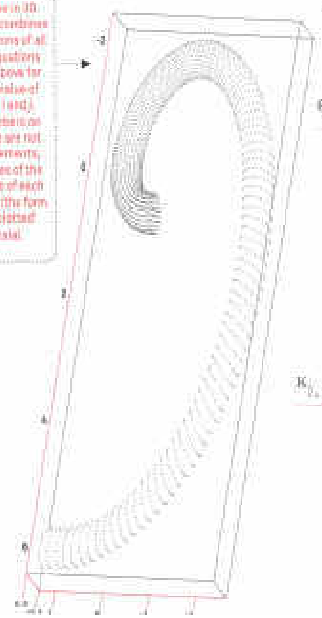
$$\Theta_{i,j} = 0.5\sin\left(\frac{2\cdot i}{25}\cdot\pi\right)$$

$$K_{i,j} = \left[1.5 + 3.2\left(\frac{j}{150}\right)^2 + 0.5\cos\left(\frac{2\cdot i}{25}\cdot\pi\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{1.1\cdot j}{150}\cdot\pi\right)$$

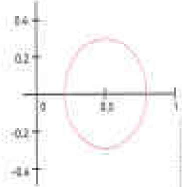
Find out where gramigna is located in our Pasta Family Tree – and why (page 010).

Named after (Ω, Θ, Κ), three letters from the Greek alphabet, these three equations form the 'genetic code' of the pasta shape. Because the shape is 3D, we need three equations to represent it. Each equation sets the measurements in a separate dimension: width, length and depth. These equations feature simple mathematical functions that use the ranges defined above to 'plot' the form.

Gramigna in 3D. Each dot combines the solutions of all three equations shown above for a given value of ranges i and j. The numbers on the axes are not measurements, but values of the solutions of each equation (the form is not 'plotted' to scale).



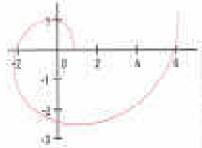
$\Theta_{i,0}$



$\Omega_{i,1}$

Solving equations Θ and Ω for j=0, j=1, and i=0 to 25 gives us the circular cross-section of gramigna. We used this and other, similar results to place the shape in the Pasta Family Tree.

$K_{i,1}$



$\Omega_{i,1}$

Check the absolute cooking time and average dimensions of these gramigna surveyed. (Cooking times may vary, so consult manufacturer's instructions.)

Length: 26 mm | Width: 13 mm

Diameter: 3 mm

FUSILLI

A popular set from the *pasta corta* (short pasta) family, *fusilli* (little spindles) were originally made by quickly wrapping a *spaghetto* (see page 165) around a large needle. Best served as *pastasciutta* (pasta boiled and drained) with a creamy sauce containing slices of spicy sausage.

- TWISTED LONGITUDINAL P
- SOLID CROSS-SECTION
- SMOOTH SURFACE
- SMOOTH EDGE

_ranges

$i := 0, 1 .. 200$

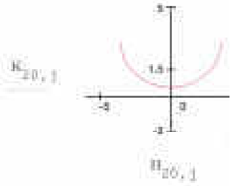
$j := 0, 1 .. 25$

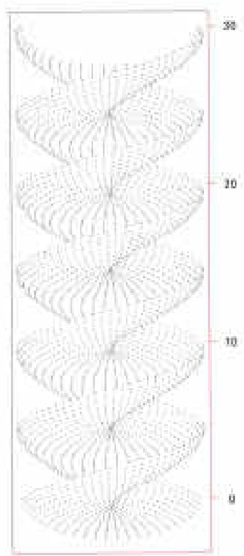
_equations

$$H_{i,j} := 5\cdot\cos\left(\frac{3\cdot i + 10}{100}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{j}{25}\cdot\pi\right)$$

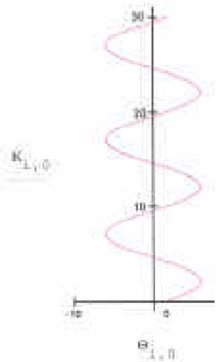
$$\Theta_{i,j} := 5\cdot\sin\left(\frac{3\cdot i + 10}{100}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{j}{25}\cdot\pi\right)$$

$$K_{i,j} := \frac{3\cdot i}{20} + 2.5\cdot\cos\left(\frac{j + 12.5}{25}\cdot\pi\right)$$





(H, Θ, K)



Length: 33 mm | Widt

Cooking Time: 12 min

Gino Fano 1871-1952

Sighefumi Mori 1951-

Varietà di Fano