

L'idea di curva e superficie

dall'astrazione matematica alla realizzazione fisica

Marco Andreatta

Professore di Geometria, Università di Trento

Presidente MUSE, Museo di Scienze di Trento



Platone 427-347 a.C.

Platone: il mito della caverna



Papiro di Ossirinco I-IV secolo d.C



Primo Libro Elementi di Euclide

Definizioni

Def. 1 Un punto è ciò che non ha parti

Def 2. Una linea è lunghezza senza larghezza

Def 4. Una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti (geodetica)

Def 15 Cerchio è una figura piana compresa da una sola linea, tutte le rette che incidono sulla quale, condotte da un solo punto tra quelli che sono posti all'interno della figura, sono uguali tra loro.

Postulati

1. Tracciare una retta da un punto a un altro punto.

2. Prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in una retta

3. Descrivere un cerchio con dati centro e raggio

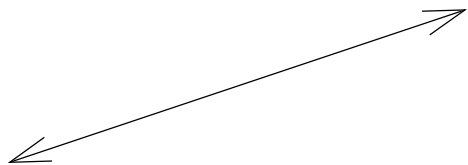
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro

5. E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti

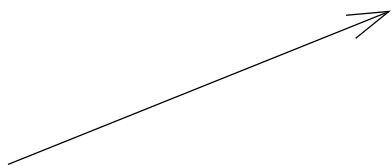
La retta (Geometry for the Classroom, Clemens)

Una retta è un oggetto a priori caratterizzato dalle proprietà:

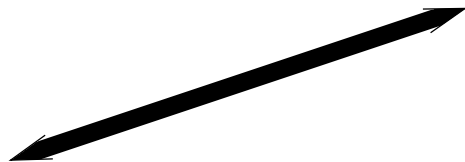
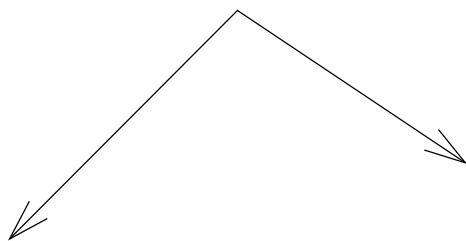
- i) Si estende all' infinito in due direzioni
- ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
- iii) dati due punti su una retta il cammino più breve per andare da un punto all'altro è dato dalla retta stessa (la retta è una geodetica)
- iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.



retta



non rette



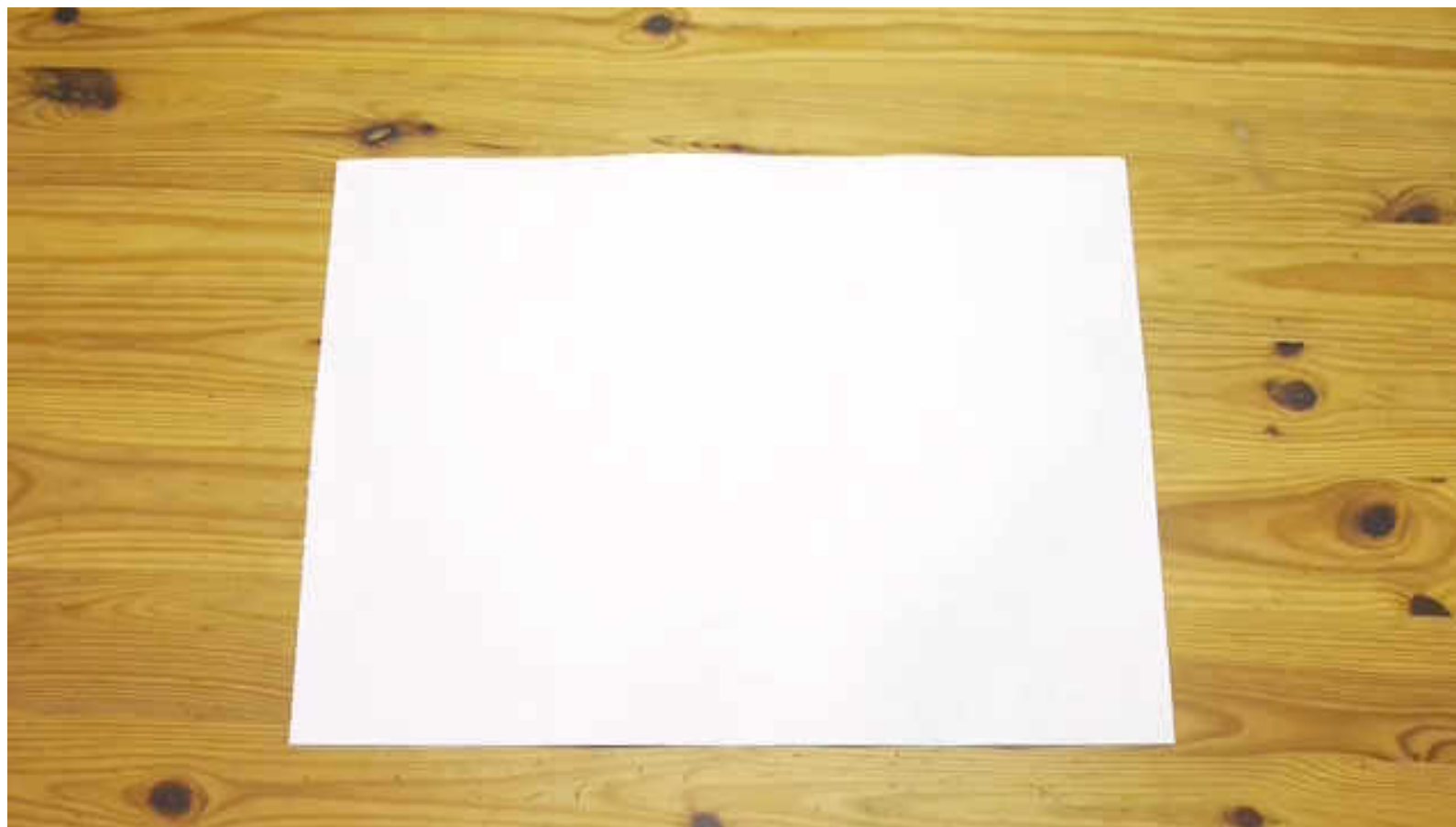
Scuola di Atene - Raffaello



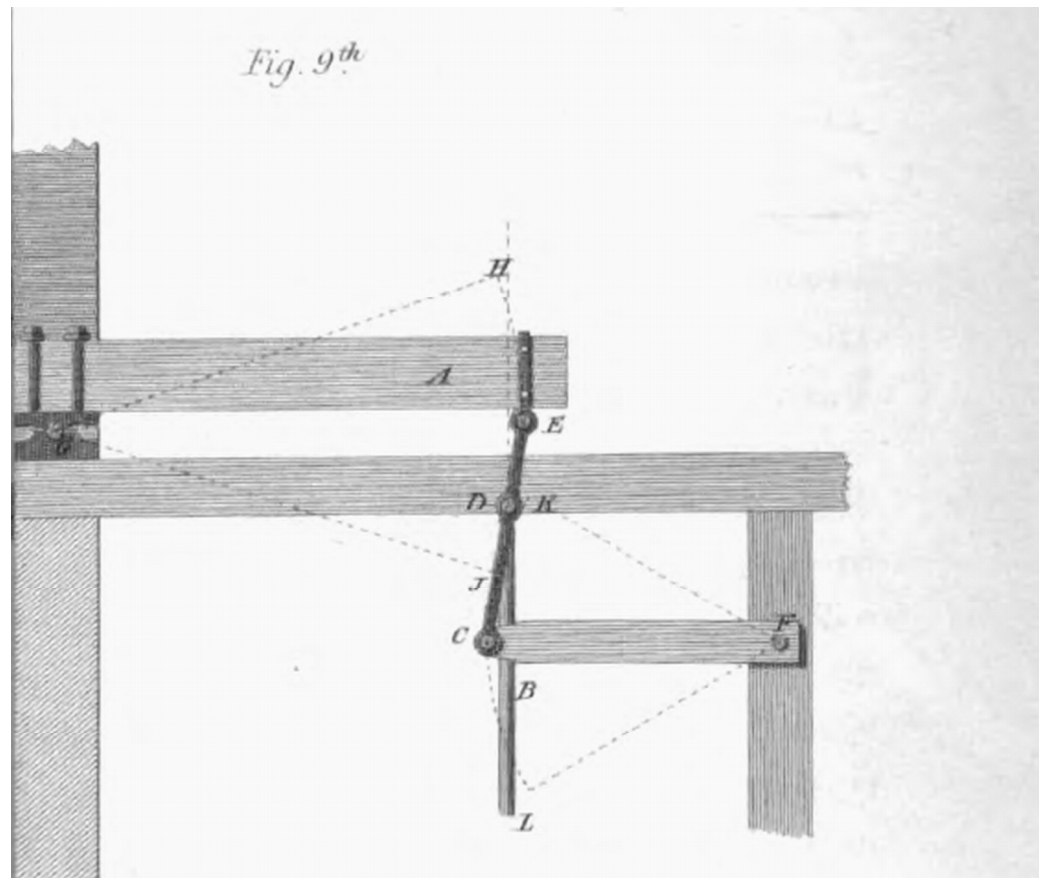
Giotto stupisce Cimabue, da YouTube

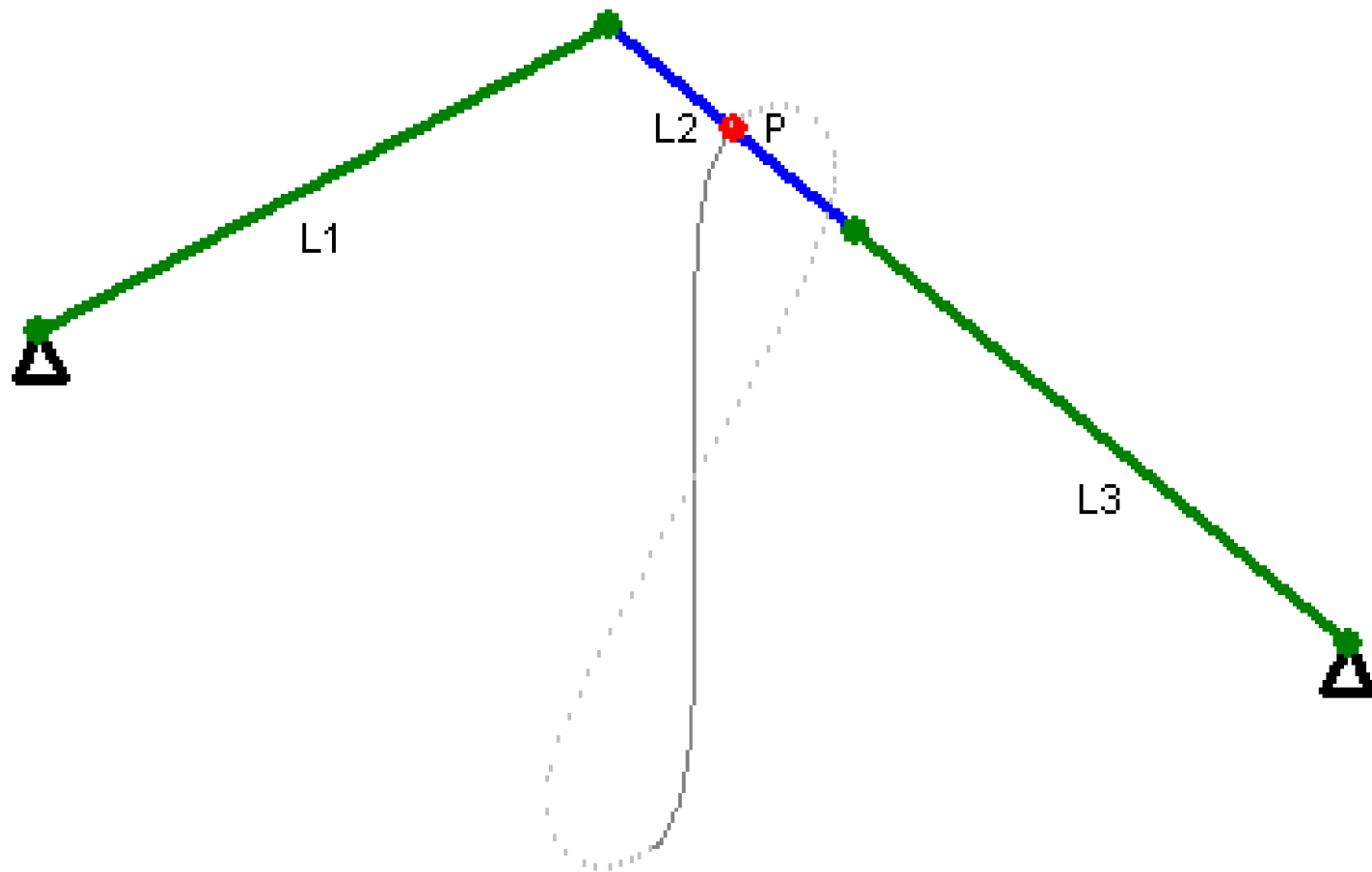
- : <https://www.youtube.com/watch?v=zR3wbEudD1I>

Giotto stupisce Cimabue, da YouTube

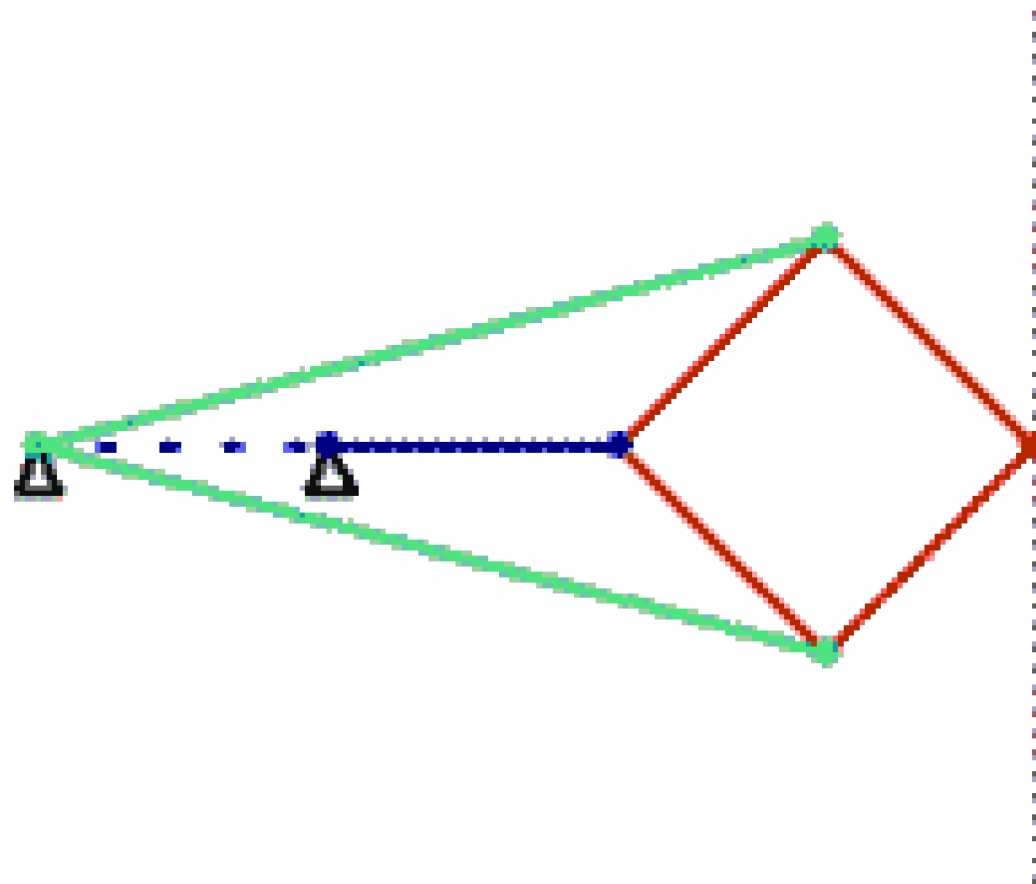


James Watt - brevetto (1784)



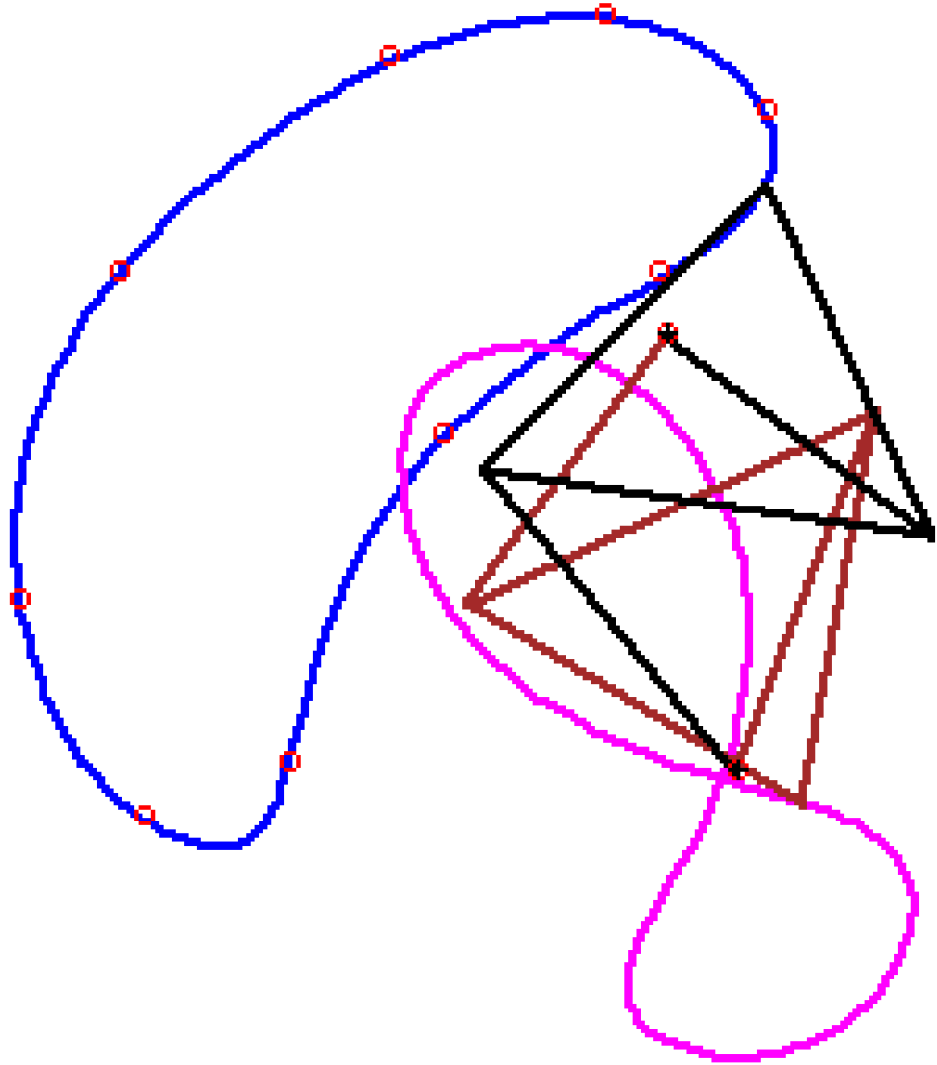


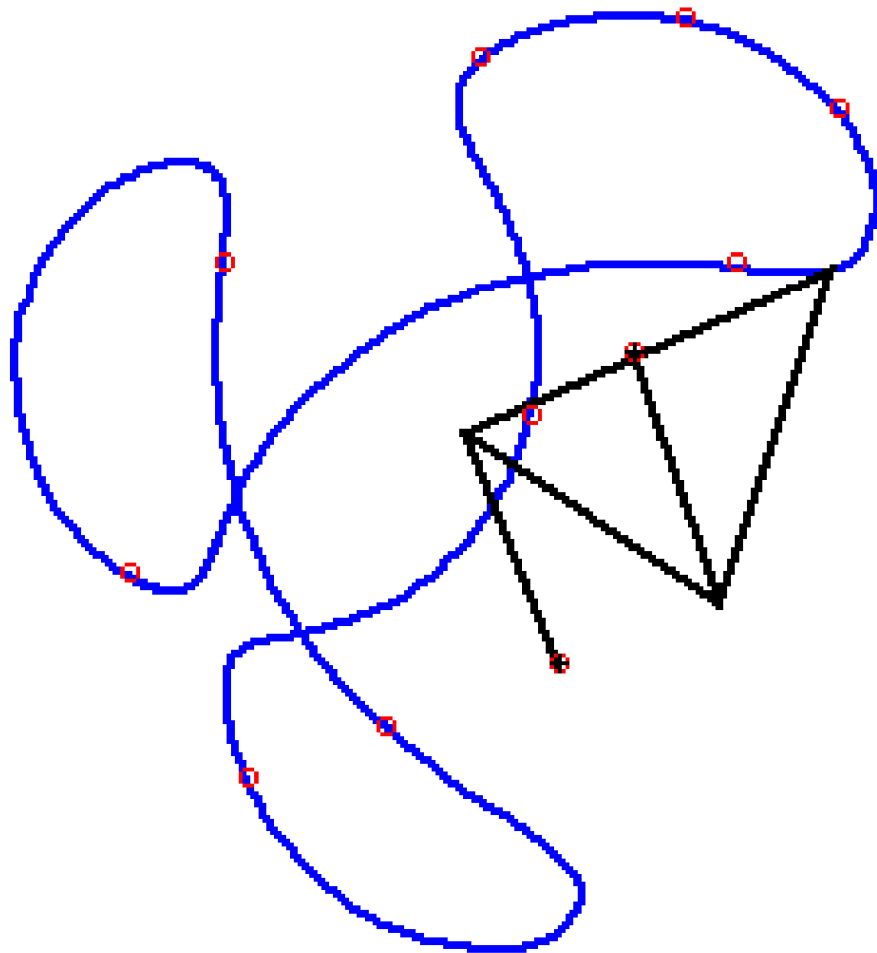
G. N. Peaucellier (1832-1913)

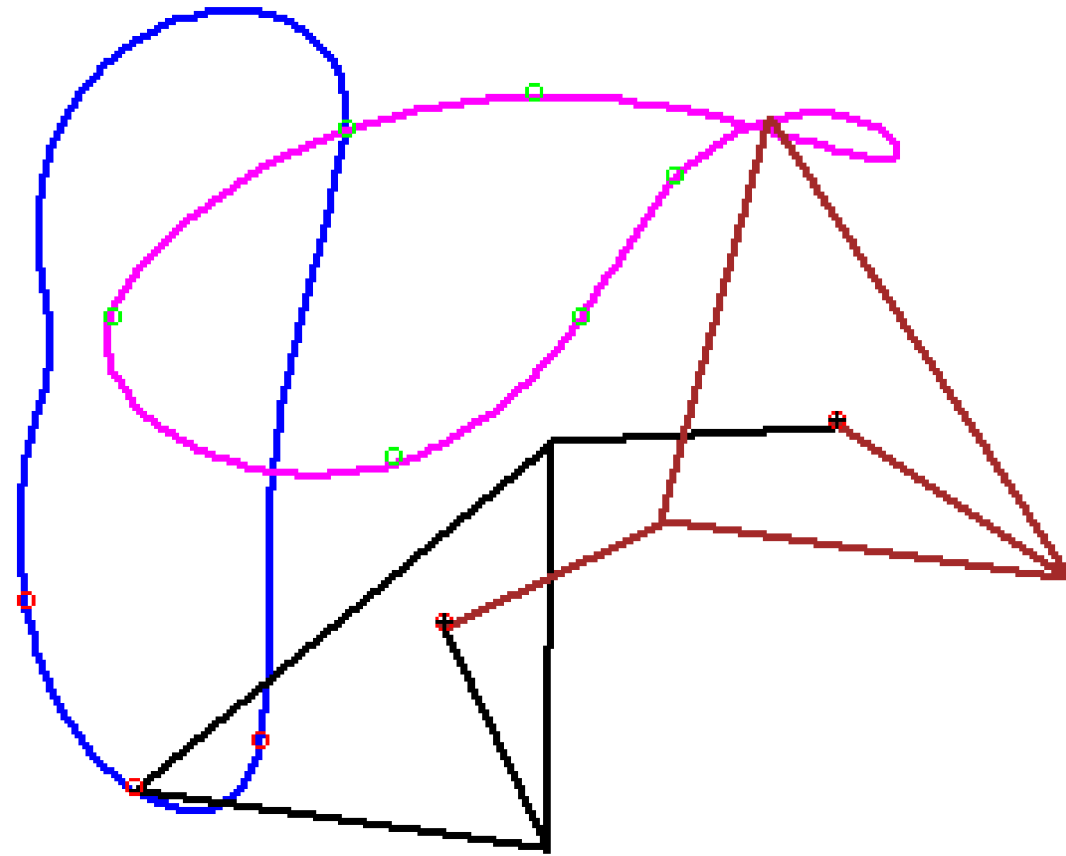


Teorema di Kempe (1876)

Ogni curva algebrica piana può essere disegnata (costruita) con un meccanismo articolato









gathx.com

Wiper Linkage
OEM#: 5485175
LACETTI/OPTRA

Costruzioni con riga e compasso, dai greci a Mascheroni



Mascheroni 1750-1800
Geometria del Compasso



Federigo Enriques, 1871-1946

lineo (nella posizione P) considerando l'angolo della tangente a C in P con la tangente in un punto vicino P_1 , dividendolo per l'arco PP_1 , e passando al limite per P_1 tendente a P . Si definisce così una *prima curvatura* $1/r$, o *flessione*, di C in P ; r ne è il *raggio di prima curvatura* o di *flessione*; r è pure il raggio del *cerchio osculatore*, il quale sta nel piano osculatore (v. CURVE) e si definisce mediante tre punti di C che tendono a P ; la retta perpendicolare al piano osculatore nel centro di detto circolo è l'*asse di curvatura*, ed è la posizione limite della retta comune ai piani normali a C in P e P_1 quando P_1 tende a P su C . La stessa costruzione, applicata ai piani osculatori di C anziché alle tangenti, cioè, che fa lo stesso, alle *binormali* di C , che sono le perpendicolari ai piani osculatori nei rispettivi punti di C , conduce a definire una *seconda curvatura*, o *curva*, e che misura la rapidità con cui C si scosta in P dall'andamento piano; ρ è il *raggio di seconda curvatura*, o di *torsione*, di C in P . Ripetendo ancora la stessa costruzione per le normali principali di C si trova una *curvatura totale* $1/R$, che non dà nulla di nuovo, perché $1/R^2 = 1/r^2 + 1/\rho^2$. La linea C è nota di forma e di grandezza quando ne siano date le *equazioni intrinseche* $r = r(s)$, $\rho = \rho(s)$, che esprimono r, ρ in funzione dell'arco s .

Si può giudicare della curvatura d'una superficie S in un suo punto P conoscendo quella delle linee tracciate su S e uscenti da P nelle varie direzioni; basta anzi considerare le *sezioni normali*, cioè le linee piane che si hanno tagliando S coi piani che passano per la normale n ad S in P ; occorre però scegliere su n un senso positivo, e quindi attribuire un segno $+$ o $-$ al raggio di curvatura R di una sezione normale secondoché essa è concava, in P , dalla parte della normale positiva oppure dalla parte opposta. Studiando allora come varia R al variare della sezione normale corrispondente, si trova che R ammette un valor massimo ed un valor minimo (da intendersi in senso relativo), R_1 e R_2 ; e questi due valori spettano a due sezioni normali fra loro perpendicolari, le *sezioni normali* diante le due curvature principali $1/R_1$ e $1/R_2$ dalla formula (di Eulero): $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}$. Il prodotto $K = 1/(R_1 R_2)$ si chiama

la *curvatura totale* di S in P (K. F. Gauss, 1827). La forma di S in un piccolo intorno di P dipende dal segno di K ; secondoché $K \geq 0$, cioè secondoché i segni di R_1 e R_2 sono eguali o opposti, detta forma è quella di un ellissoide o di un iperboloido ad una falda. Come caso intermedio, se $K = 0$, cioè se è nulla in P una delle curvature principali, S ha in P la forma di un cilindro. Nei tre casi P si dice rispettivamente *punto ellittico*, *iperbolico*, *parabolico*. Il valore di K non muta se S si flette, come se fosse un tessuto flessibile e inestensibile, senza strappi né stramenti né contrazioni. Si può dare di K il seguente significato intrinseco: considerato su S un *triangolo geodetico*, ossia un triangolo i cui lati siano linee geodetiche, la differenza tra la somma degli angoli del triangolo e π (*eccessa geodetica* del triangolo) vale $\int K d\sigma$ esteso all'area del triangolo (teor. di Gauss). In particolare, sulle *superficie a curvatura totale costante*, come il piano, la sfera e la pseudosfera, K è costante in ogni punto. Un'altra curvatura intrinseca è $H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Essa è nulla per le *superficie ad area minima* (v. SUPERFICIE: Superficie notevoli).

Si può estendere (Riemann, 1854) la nozione della curvatura a una varietà V con più di tre dimensioni, sulla quale si suppone dato un sistema di coordinate curvilinee u_1, u_2, \dots, u_n e assegnato inoltre l'*elemento lineare*, ossia l'espressione del quadrato ds^2 della distanza infinitesima ds di due punti di V infinitamente vicini e di coordinate u_1, u_2, \dots, u_n e $u_1 + du_1, u_2 + du_2, \dots, u_n + du_n$:

$$ds^2 = \sum a_{ik} du_i du_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

In tali ipotesi sono definite su V le linee geodetiche; sicché se si prendono due geodetiche uscenti da un punto $P(u_1, u_2, \dots, u_n)$ di V secondo due direzioni distinte, che vadano da P ai punti infinitamente vicini $u_1 + du_1, \dots, u_n + du_n$ e $u_1 + du_1', \dots, u_n + du_n'$, riesce definita una *superficie geodetica* S uscente da P , ossia la superficie ricoperta dalle geodetiche uscenti da P nelle direzioni che vanno da P a tutti i punti $u_1 + du_1 + du_1', \dots, u_n + du_n + du_n'$; la curvatura totale K di S in P dipende in generale da P e da S , e si chiama la *curvatura di V nel punto P e secondo la giacitura della superficie S*. Se, per ogni singola posizione

di P su V , essa non dipende dalla superficie geodetica F che si è fatta passare per P , cioè se essa è *localmente* costante, allora essa riesce indipendente anche da P e ovunque costante su V , la quale si chiama allora una varietà a curvatura costante (teor. di F. Schur).

Bibl.: Oltre i trattati di geometria differenziale, ad es. di L. Bianchi, di G. Darboux, di W. Blaschke, ecc., si veda anche: T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, redatte da E. Persico, Roma 1925, cap. VII. E. G. T.

CURVE. - Nell'uso comune della parola, « curva » significa linea non retta e non composta di linee rette. Già Parmenide d'Elea, secondo Proclo nel *Commento all'Euclide*, distingueva le linee in rette, curve e miste. Ma nell'evoluzione del linguaggio matematico, che tende sempre ad eliminare le eccezioni affermando una veduta di continuità, la parola « curva » è divenuta sinonimo di « linea » oltre il cerchio: in primo luogo le coniche, e poi le curve d'ordine superiore usate per la soluzione del problema della trisezione dell'angolo o della duplicazione del cubo, cossido di Diocle e conicoide di Nicomedeo, e poi ancora la quadratrice di Ippia e Dinostro, la spirale d'Archimedeo, ecc. Queste curve hanno offerto occasione a trattare diversi problemi (concernenti le tangenti, i massimi e minimi), che la geometria moderna ha risoluto in una maniera generale, e che stanno alla base del calcolo differenziale.

1. *Sulla definizione di curva.* - Nell'antica scuola di Pitagora (fondata il 540 a. C.) la linea si pensava costituita di punti-monadi, corpiccioli elementari di piccola estensione: da questa veduta, che risponde ad una conoscenza empirica non ancora razionalizzata, traevano i Pitagorici diverse conseguenze importanti, e in primo luogo la possibilità della misura delle linee. Ma la teoria andò incontro ad una crisi in seguito alla scoperta dell'incommensurabilità, fatta nella stessa scuola.

Si approfondì allora dagli Eleati (Parmenide e Zenone d'Elea) l'analisi del concetto degli enti geometrici, e si riuscì a capire che essi hanno un significato puramente ideale: il punto è senza estensione. La discussione intorno all'esistenza di tali figure matematiche era viva in Grecia nella seconda metà del sec. V a. C. Sofisti, come Protogora d'Abdera, sostenevano che le vere linee hanno una certa larghezza e differiscono perciò dal concetto dei matematici; così il cerchio deve avere, non un punto, ma un piccolo tratto a comune con la tangente. Si trova qui una veduta empirica, cui consente Aristotele, e che sarà conservata dalla tradizione degli scettici, raccolta più tardi nel libro *Adversus geometras* di Sesto Empirico. Frattanto i filosofi razionalisti, ispirati dalle matematiche - Democrito e Platone - sostenevano, contro gli empirici, la realtà degli Intelligibili o delle Idee: idea = *idéa* significa originariamente schema o figura matematica.

I tentativi per chiarire il concetto generale della linea, nel secolo IV a. C., conducono ad alcune definizioni che ci sono riportate da Platone e Aristotele: definizione genetica della linea come luogo d'un punto che si muove, e definizione delle linee come termini delle superficie. La prima si ritrova in Proclo (ed. Friedlein 1873, p. 97) e in Pappo (ed. Hultsch, 1877, II, p. 662). La seconda trova nella *Metafisica* di Aristotele (II, 1, 1026a) una polemica elatistico-pitagorica.

Le anzidette definizioni sono passate nell'insegnamento tradizionale della geometria; ma anche prima di arrivare alla critica contemporanea, il pensiero matematico doveva riconoscerne l'imprecisione e l'insufficienza. Così nell'*Encyclopédie* (nuova ed., IX, Ginevra 1777, p. 758), D'Alembert dice che la linea è un concetto fondamentale non ulteriormente spiegabile: per chiarire questo concetto generale conviene assumere come data la nozione di linee e superficie particolari, cioè della retta, del piano, ecc.

L'intero sviluppo delle matematiche moderne conduce a tale chiarimento. Ed in questo figura come essenziale il metodo della geometria analitica di Fermat e Descartes (*La géométrie*, 1637).

Riferiamoci per semplicità alla geometria del piano, e assumiamo in questo un sistema di assi cartesiani x, y (v. COORDINATE). La generazione meccanica della curva porta ad esprimere le coordinate d'un suo punto variabile come funzioni d'un parametro t (tempo):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$



René Descartes, 1596-1650

La Geometrie

CONTENTS

I could give here several other ways of tracing and conceiving a series of curved lines, each curve more complex than any preceding one.¹⁷⁰ But I think the best way to group together all such curves and then classify them in order, is by recognizing the fact that all points of these curves which we may call "geometric," that is, those which admit of precise and exact measurement, must bear a definite relation¹⁷¹ to all points of a straight line, and that this relation must be expressed by means of a single equation.¹⁷² If this equation contains no term of higher degree than the rectangle of two unknown quantities, or the square of one, the curve belongs to the first and simplest class,¹⁷³ which contains only the circle, the parabola, the hyperbola, and the ellipse; but when the equation contains one or more terms of the third or fourth degree¹⁷⁴ in one or both of the two unknown quantities¹⁷⁵ (for it requires two unknown quantities to express the relation between two points) the curve belongs to the second class; and if the equation contains a term of the fifth or sixth degree in either or both of the unknown quantities the curve belongs to the third class, and so on indefinitely.

¹⁷⁰ "Qui peuvent de plus en plus composer par degrés à l'infini." The French mathematicians in the last century drew a few varieties in such a different relation.

¹⁷¹ That is a relative equality between, as, for example, that between two straight lines is distributed to that between a straight line and a curve, when the length of the curve is known.

¹⁷² It will be recognized at once that this statement contains the fundamental meaning of analytic geometry.

¹⁷³ "On appelle le plus simple genre" an expression not now recognized, to now understood, the order or degree of a plane curve is the greatest number of points to which it can be cut by one straight line, while the case is the greatest number of tangents that can be drawn to it from one arbitrary point in the plane.

¹⁷⁴ Counted together because an equation of the fourth degree can always be transformed into one of the third degree.

¹⁷⁵ "Hinc Visum est interduci quædam esse etiam in 2^o, 3^o, 4^o, 5^o et 6^o —"

LIVRE SECONDE. 119

de moi: que des sections coniques, ny ce qui peut empêcher, qu'on ne conçoise la seconde, & la troisième, & toutes les autres, qu'on peut décrire, aussi bien que la première, ny par conséquent qu'on ne les reconnoisse toutes en même façon, pour servir aux spéculations de Geometrie.

Je pourrais mettre icy plusieurs autres moyens pour tracer & concevoir des lignes courbes, qui seroient de plus en plus composées par degrés à l'infini. mais pour comprendre ensemble toutes celles, qui sont en la nature, & les distinguer par ordre en certains genres, je ne sçache rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est à dire qui tombent sous quelque mesure précise & exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque equation, en trois par une mesure. Et que lorsque cette equation ne montre que jusques au rectangle de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une mesure, la ligne courbe est de premier & plus simple genre, dans lequel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'ellipse qui soient composés. mais que lorsque l'equation montre jusques à la trois ou quatrième dimension des deux, ou de l'une des deux quantités indéterminées, car il en faut deux pour exprimer icy le rapport d'un point à un autre, elle est du second; & lorsque l'equation montre jusques à la 5 ou sixième dimension, elle est du troisième; & ainsi des autres à l'infini.

Comme si je veux sçavoir de quel genre est la ligne EC, que l'imagine estre décrite par l'intersection de la règle

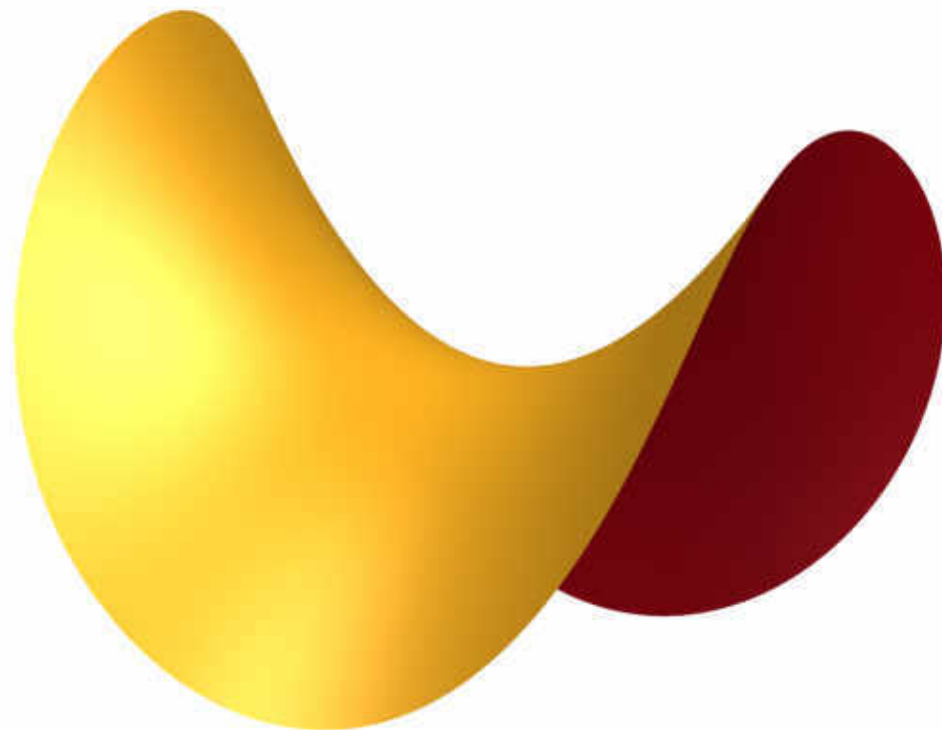
FabLab – stampanti 3D e taglierine laser



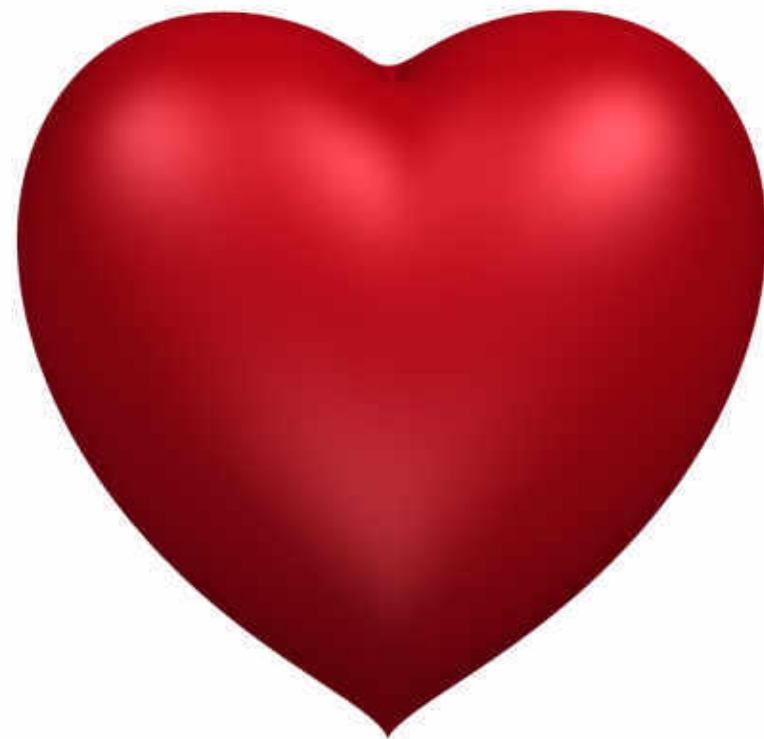
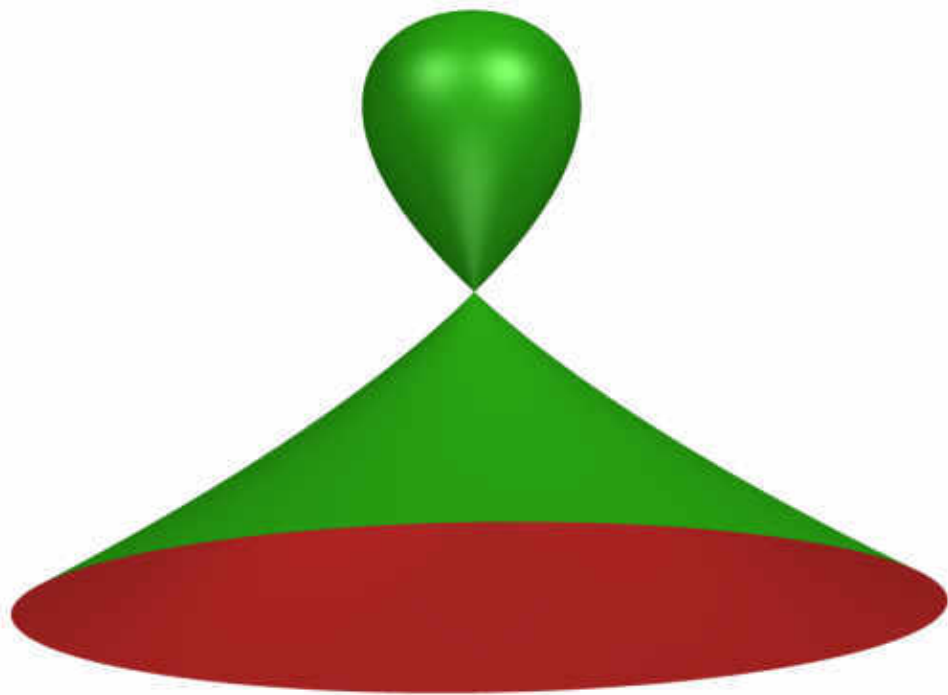
Surfer



Iperboloide iperbolico



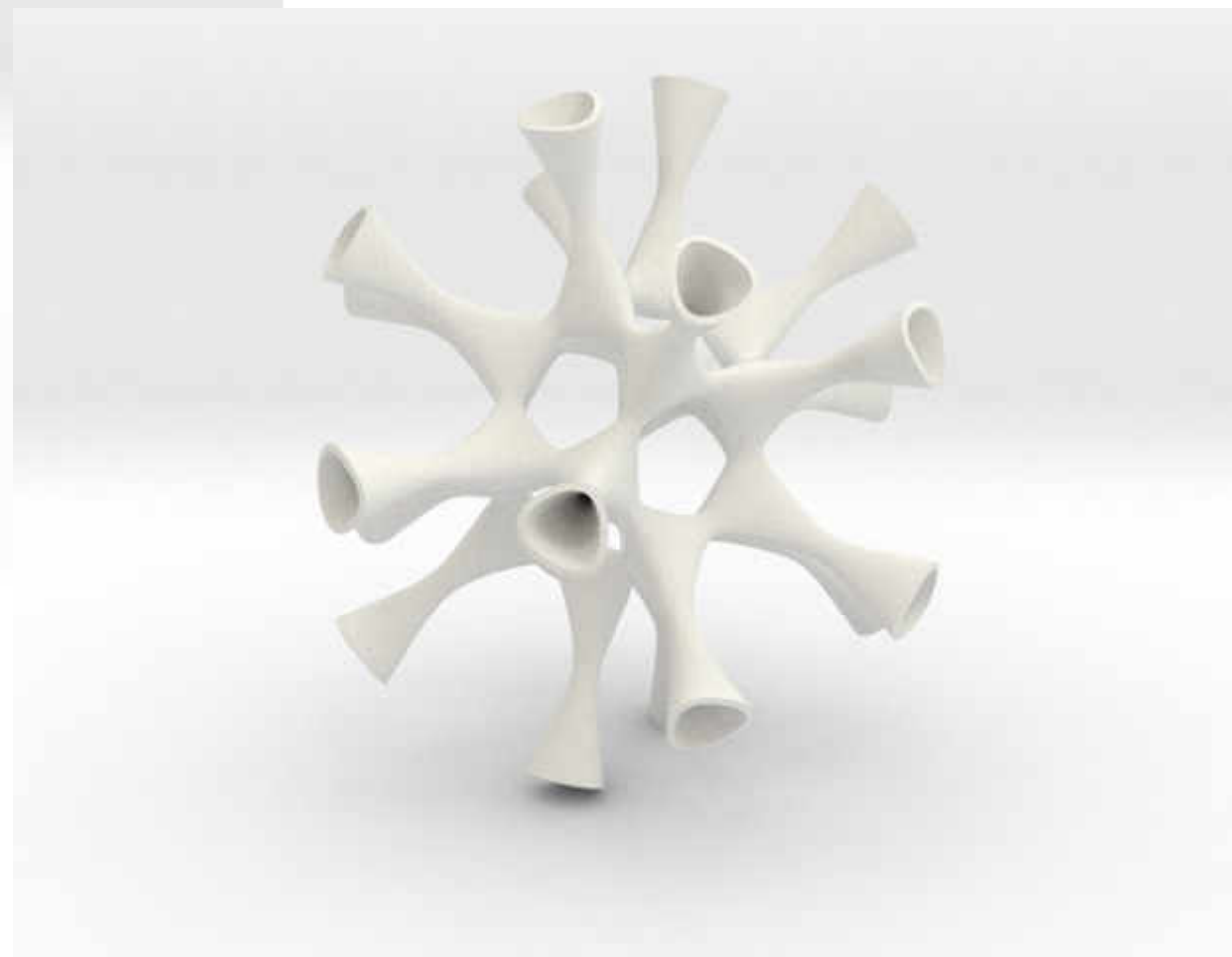
Paraboloide Iperbolico





superficie del Dini (Beltrami)

sestica di Barth



Oliver Lab

<http://math-sculpture.com/>

<https://imaginary.org/gallery/oliver-labs>



Superfici cubiche

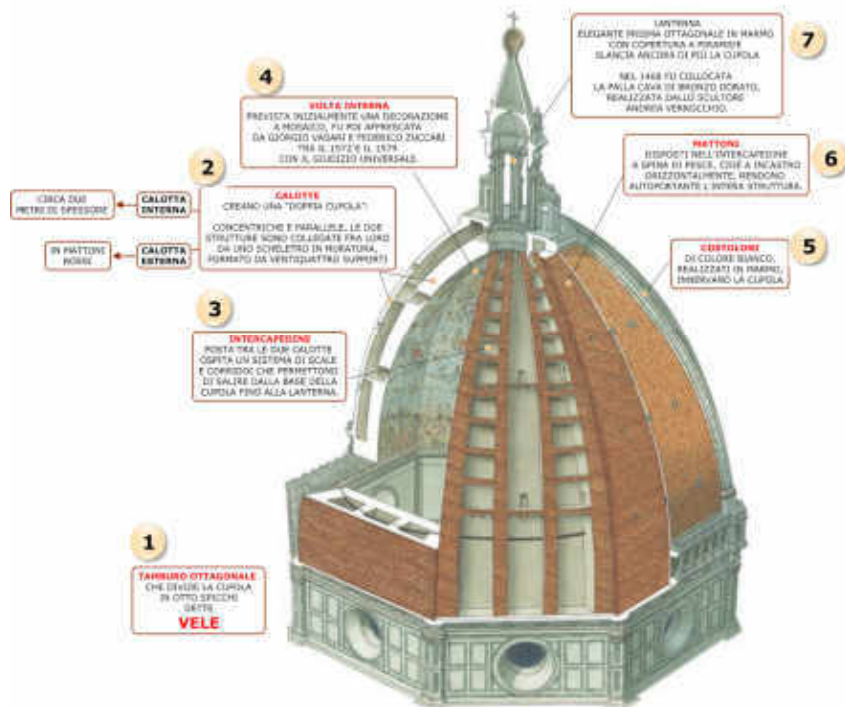
<http://www.museoscienza.org/>

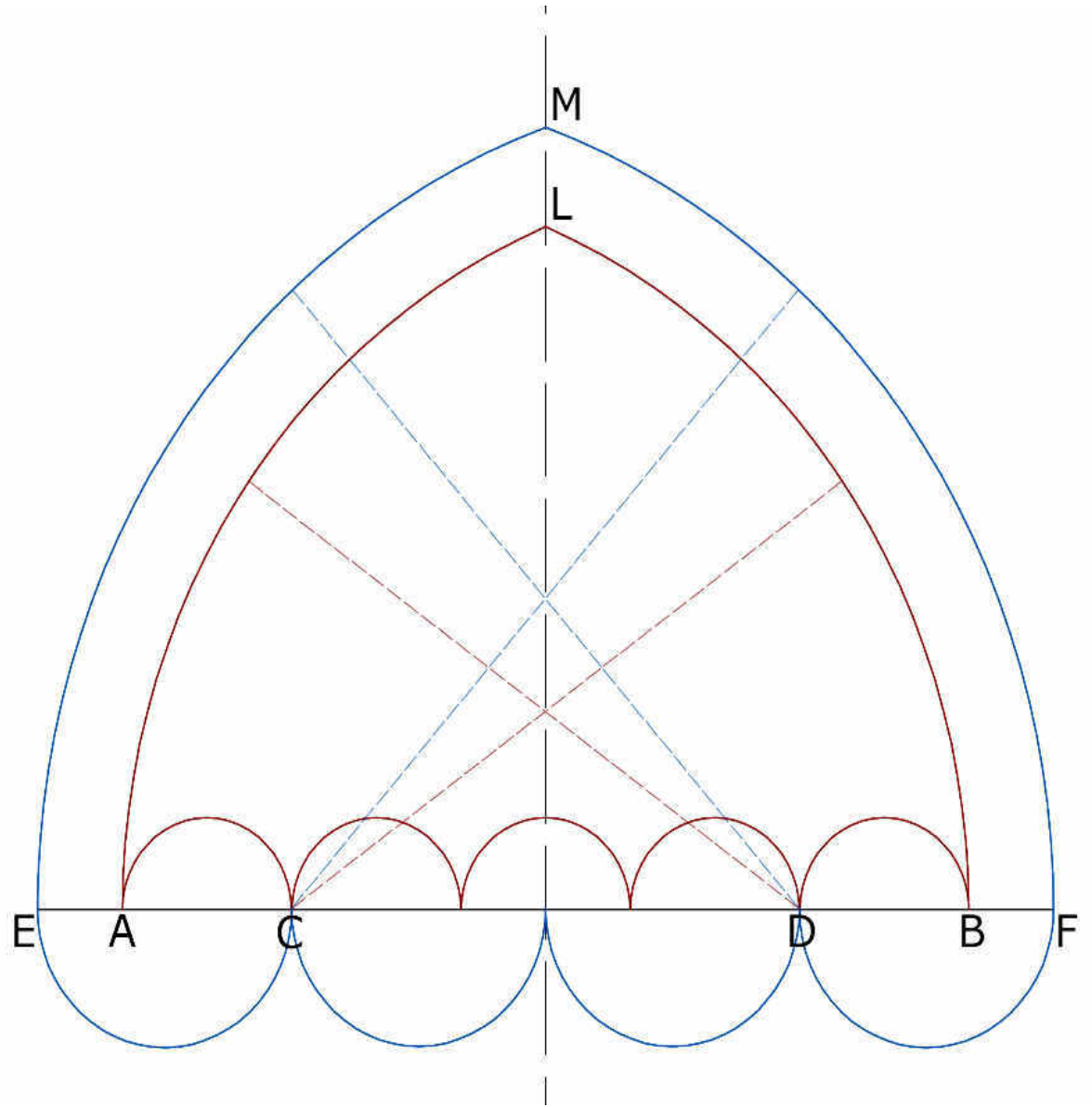
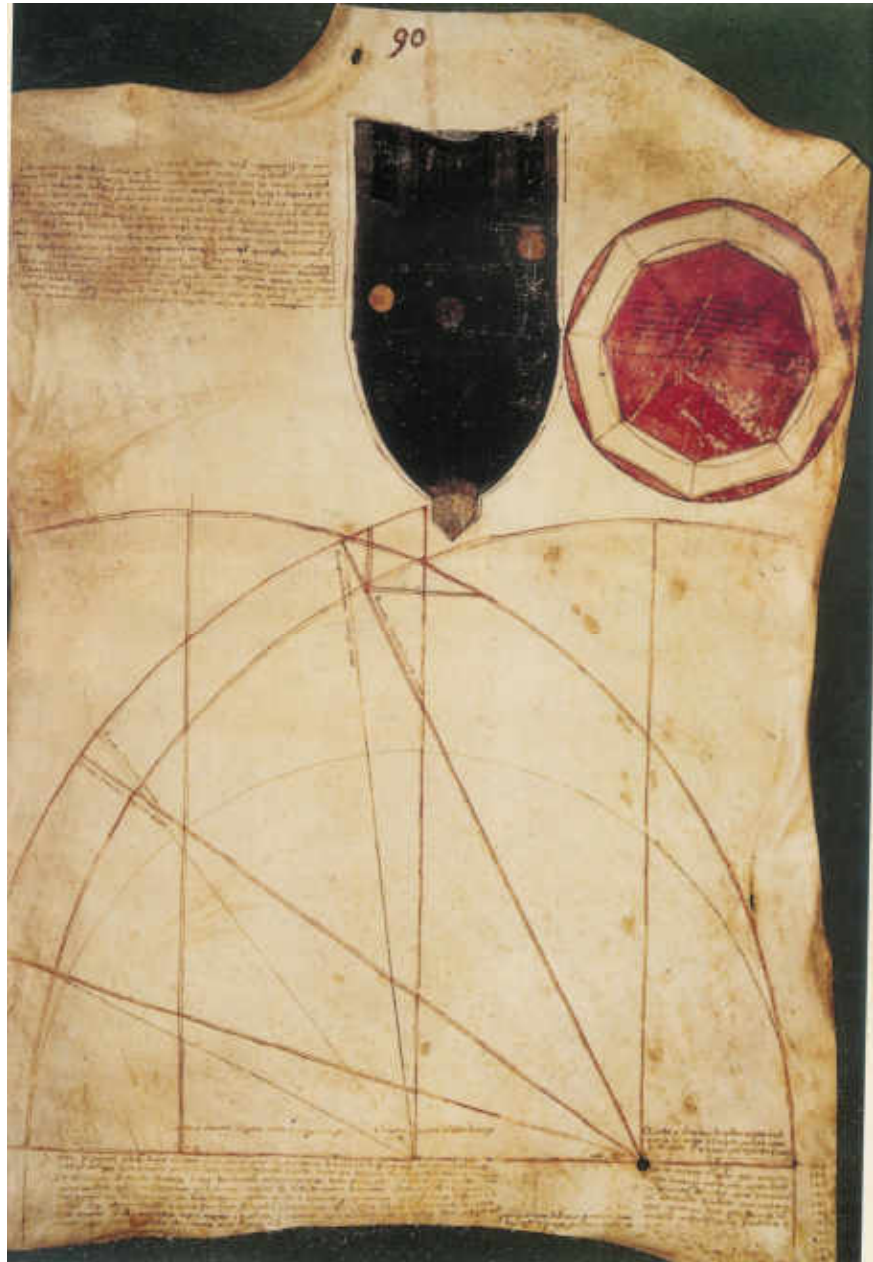


<http://math-sculpture.com/>



Catenaria – da Brunelleschi a Wembley







bottiglia di Klein















David Press at MOMATH
<https://shop.momath.org/arts-david-press-tensegrity-string-sculpture-kit.html>



{ Pasta^{by} Design }

Thames & Hudson

George L. Legendre
Foreword by Paola Antonelli



THE ARCHITECTURE OF PASTA: A USER'S GUIDE

A specialty of the northern Italian region of Emilia-Romagna, *tortiglioni* (little weed) are traditionally served with a chunky sauce of sausages, or accompanied by the world-famous *ragù alla bolognese*. Alternatively, *tortiglioni* are sometimes presented *alla pomodoro* (with a light tomato sauce).

range

$$x \in [0, 1] \cdot \pi$$

$$y \in [0, 1] \cdot \pi$$

equation

$$\theta_{1,1} = \left[0.5 + 1.2 \left(\frac{1}{100} \right)^x + 0.3 \cos \left(\frac{2-x}{24} \cdot \pi \right) \right] \sin \left(\frac{2-x}{100} \cdot \pi \right)$$

$$\theta_{2,1} = 0.3 \sin \left(\frac{2-x}{24} \cdot \pi \right)$$

$$K_{1,1} = \left[0.5 + 1.2 \left(\frac{1}{100} \right)^x + 0.3 \cos \left(\frac{2-x}{24} \cdot \pi \right) \right] \sin \left(\frac{2-x}{100} \cdot \pi \right)$$

Geometry in 3D
Each dot combines the solutions of all three equations shown above for a given value of range (x). The numbers on the axes are not measurements, but values of the solutions of each equation (the form is not plotted to scale).



BENT LONGITUDINAL PROFILE

HOLLOW CROSS SECTION

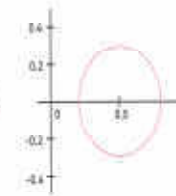
SMOOTH SURFACE

SMOOTH EDGES

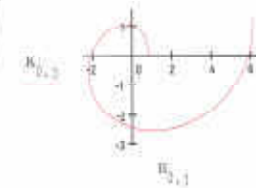
A brief text explaining the etymological and historical derivation of the pasta, as well as giving example dishes. Unless otherwise stated, ingredients are durum wheat flour and water.

Find out where *tortiglioni* is located in our Pasta Family Tree - and why *tortiglioni*!

Named after θ , θ , K , three letters from the Greek alphabet, these three equations form the "genetic code" of the pasta shape. Because the shape is 3D, we need three equations to represent it. Each equation sets the measurement in a separate dimension: width, length and depth. Three equations feature simple mathematical functions that use the ranges defined above to "plot" the form...



Solving equations $\theta_{1,1}$ and $\theta_{2,1}$ for $x=0$, $x=1$, and $x=0.25$ gives us the circular cross-section of *tortiglioni*. We used this and other similar results to place the shape in the Pasta Family Tree.



Check the absolute cooking time and average thickness of these *tortiglioni* surveyed. (Cooking times may vary, so consult manufacturer's instructions.)

Length: 26 mm | Width: 13 mm
Diameter: 5 mm
Cooking time: 10 min



FUSILLI

A popular set from the *pasto corto* (short pasta) family, fusilli (little spindles) were originally made by quickly wrapping a spaghetti (see page 165) around a large needle. Best served as *pastasciutta* (pasta boiled and drained) with a creamy sauce containing slices of spicy sausage.

...ranges

$$x > 0, y \in [0, 200]$$

$$z > 0, r \in [0, 20]$$

...equations

$$\pi_{1,1} = 4 \cos\left(\frac{3.14 + 2\pi}{100} x\right) \cos\left(\frac{z}{25} \pi\right)$$

$$\theta_{1,1} = 6 \sin\left(\frac{3.14 + 2\pi}{100} x\right) \cos\left(\frac{z}{25} \pi\right)$$

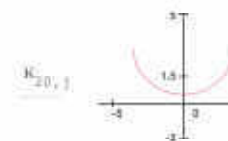
$$K_{2,1} = \frac{3.14}{20} + 2.7 \cos\left(\frac{z + 12.5}{25} \pi\right)$$

...TWISTED LONGITUDINAL P

- SOLID CROSS-SECTION

- SMOOTH SURFACE

- SMOOTH EDGE



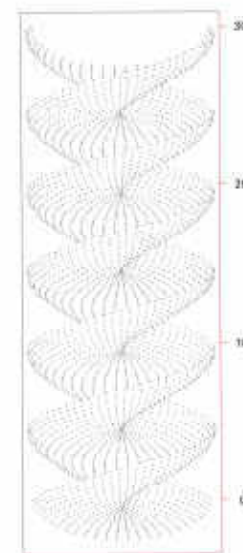
$\pi_{20,1}$

$K_{1,0}$



$\theta_{1,0}$

(π, θ, K)



Length: 53 mm | Width:
Cooking Time: 12 min

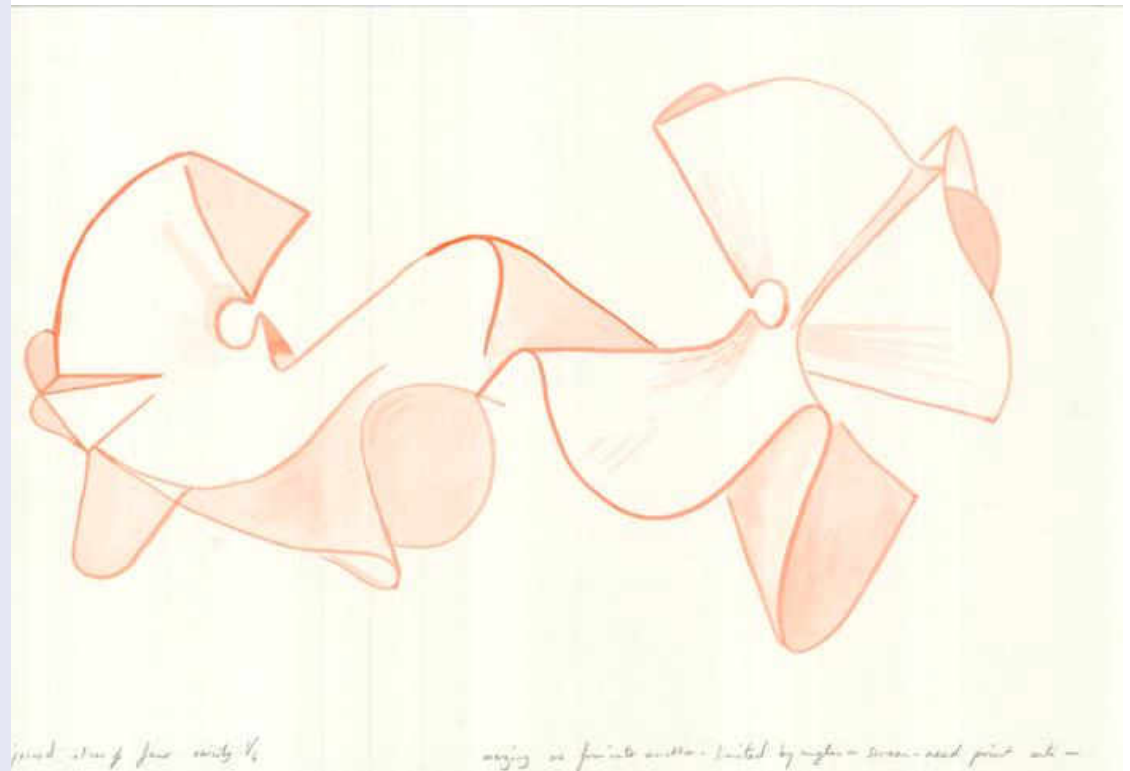
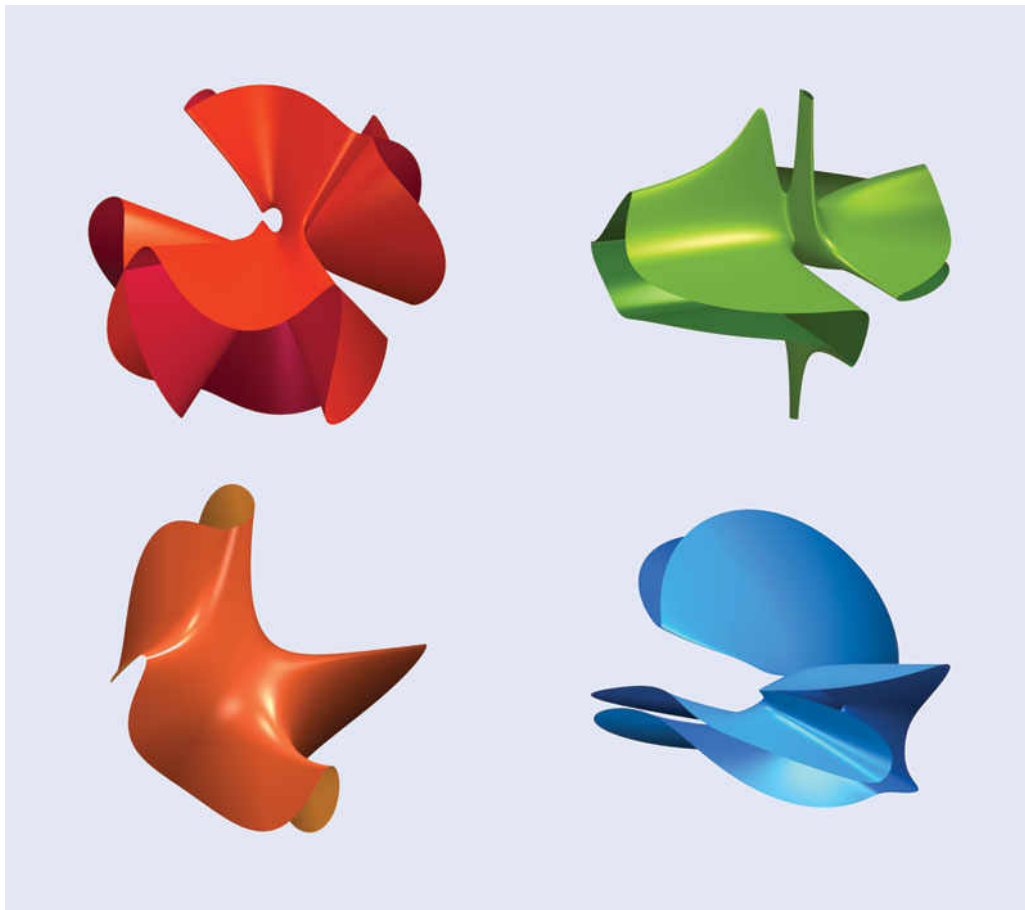
Gino Fano 1871-1952



Sighefumi Mori 1951-



Varietà di Fano



found - see of four variety 1/2

origins in finite algebra - limited by higher - screen - need print - etc -