Allenamenti per le gare di matematica

A.S. 2021/2022

Introduzione

In questa sezione forniamo definizioni e dimostrazioni di alcuni strumenti matematici che andremo ad utilizzare negli esercizi degli allenamenti.

Purtroppo, questo documento non è *self contained*, ovvero non tutti gli strumenti teorici necessari alle risoluzioni sono presenti in questa breve introduzione. La volontà è quella di rendere la soluzione della maggior parte degli esercizi il più comprensibile possibile, indipendentemente dall'esperienza *olimpionica* del lettore.

Coefficienti binomiali. Introduciamo un oggetto di base della combinatoria detto coefficiente binomiale.

Ricordiamo dapprima che, dato un numero naturale n, si dice *n fattoriale* il numero

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

e si pone per convenzione $0! = 1$.

Dati due numeri naturali n, k con $k \leq n$, il coefficiente binomiale è definito come

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

In Italia leggiamo $\binom{n}{k}$ come `"n su k"`. Gli inglesi leggono il coefficiente binomiale utilizzando un espressione che meglio rende l'idea del suo utilizzo matematico: `"n choose k"` ovvero `"n scegli k"`. Infatti, il valore $\binom{n}{k}$ è il numero di modi in cui è possibile scegliere k elementi da un insieme di n elementi.

Facciamo un esempio pratico:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

E' evidente che nel conto si verificano tante semplificazioni: in particolare, il numero che si ottiene è sempre un numero naturale. Tale proprietà è evidente dalla seguente formula

$$(T) \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

valida per ogni n, k naturale tale che $0 < k \leq n$.

Vediamo ora delle proprietà utili da tenere a mente che seguono dalla definizione.

• $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, infatti

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Inoltre:

• $\binom{n}{1} = n$, in quanto

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n\,,$$

• $\binom{n}{n-1} = n$, in quanto

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-(n-1)} = \binom{n}{1} = n\,,$$

• $\binom{n}{0} = 1$, in quanto

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1\,,$$

• $\binom{n}{n} = 1$, in quanto
$$\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = 1.$$

Concludiamo facendo notare che i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ non sono altro che i numeri presenti nel famoso Triangolo di Tartaglia e che la formula (T) riportata sopra non è altro che la regola per la sua costruzione.

Cenni di algebra modulare. Diamo qualche definizione e illustriamo alcune semplici proprietà dell'algebra modulare o aritmetica modulare.

Siano m ed n due numeri interi e d un numero naturale positivo, diciamo che *m è congruo a n modulo d* (e scriveremo in breve $m \equiv_d n$) se $m - n$ è un multiplo di d, ovvero se esiste un intero $q \in \mathbb{Z}$ (eventualmente negativo!) tale che $m - n = qd$. In simboli scriveremo:
$$m \equiv_d n \iff \exists q \in \mathbb{Z} : m - n = qd\,.$$
Questa è una relazione di equivalenza. Mostriamo che valgono le tre proprietà.

• Riflessività: $m \equiv_d m$ segue dal fatto che $m - m = 0$ è multiplo di d.

• Simmetria: $m \equiv_d n$ implica $n \equiv_d m$. Infatti $m \equiv_d n$ significa che esiste un intero $q \in \mathbb{Z}$ tale che $m - n = qd$, ma allora $n - m = (-q)d$, e siccome $-q \in \mathbb{Z}$ abbiamo $n \equiv_d m$.

• Transitività: $m \equiv_d n$ e $n \equiv_d l$ implica $m \equiv_d l$. Usando la definizione si ha che esistono interi $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $m - n = q_1 d$ e $n - l = q_2 d$. Sommando le due equazioni si ha $m - l = (q_1 + q_2)d$, e siccome $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$, si ha $m \equiv_d l$.

Esiste un modo canonico (ovvero standard, classico) di scegliere i rappresentanti delle classi di equivalenza, questo segue dall'algoritmo euclideo della divisione.

È noto dall'algoritmo che presi m, d come sopra, esistono $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, ..., d-1\}$ tali che $m = qd + r$, ovvero $m \equiv_d r$ (se $m > 0$ i valori q ed r non sono altro che il quoziente e il resto della divisione che si impara alle elementari, per i numeri negativi invece bisogna fare un po' più di attenzione). Quindi la classe di equivalenza di m modulo d può sempre essere rappresentata da un numero naturale tra 0 e $d - 1$ inclusi.

Non a caso, le classi di equivalenza della relazione di congruenza sono dette *classi di resto* in quanto possono essere rappresentate dai resti possibili nella divisione per d.

Facciamo qualche esempio/osservazione:

a. ogni numero intero è congruo a 0 modulo 1,

b. ogni numero pari è congruo a 0 modulo 2, mentre ogni numero dispari è congruo a 1 modulo 2,

c. determinare le ultime y cifre di un numero intero z equivale a stabilire il suo resto nella divisione per 10^y, ovvero determinare x tale che $z \equiv_{10^y} x$: infatti per l'algoritmo di divisione euclidea $z = m \cdot 10^y + x$ per un certo m intero e $x \in \{0, 1, 2, ..., 10^y - 1\}$; ora $m \cdot 10^y$ è un intero la cui scrittura decimale termina con y zeri, dunque le ultime y cifre di z sono esattamente determinate da x.

Usando l'algebra modulare (ovvero lavorando con classi di resto modulo un divisore fissato piuttosto che con numeri interi) possiamo fare i conti esattamente come in $\mathbb{Z}$. Infatti valgono le seguenti proprietà:

1. se $m_1 \equiv_d n_1$ e $m_2 \equiv_d n_2$, allora $m_1 + m_2 \equiv_d n_1 + n_2$,

2. se $m_1 \equiv_d n_1$ e $m_2 \equiv_d n_2$, allora $m_1 \cdot m_2 \equiv_d n_1 \cdot n_2$,

3. se $m \equiv_d n$, allora per ogni t naturale $m^t \equiv_d n^t$.

Per dimostrare **1** osserviamo che $m_1 \equiv_d n_1$ e $m_2 \equiv_d n_2$ equivale a dire che esistono q_1, q_2 interi tali che $m_1 - n_1 = q_1 \cdot d$ e $m_2 - n_2 = q_2 \cdot d$, allora sommando i membri di queste equazioni
$$\begin{aligned} &(m_1 - n_1) + (m_2 - n_2) = q_1 \cdot d + q_2 \cdot d \\ \Rightarrow \quad &(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) = (q_1 + q_2) \cdot d \end{aligned}$$
da cui segue che $m_1 + m_2 \equiv_d n_1 + n_2$.

Per dimostrare **2**, invece conviene scrivere $m_1 = n_1 + q_1 \cdot d$ e $m_2 = n_2 + q_2 \cdot d$, così facendo

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 = (n_1 + q_1 \cdot d) \cdot (n_2 + q_2 \cdot d) &= n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot q_2 \cdot d + n_2 \cdot q_1 \cdot d + q_1 \cdot q_2 \cdot d^2 \\ &= n_1 \cdot n_2 + (n_1 \cdot q_2 + n_2 \cdot q_1 + q_1 \cdot q_2 \cdot d) \cdot d \\ &\Rightarrow (m_1 \cdot m_2) - (n_1 \cdot n_2) = (n_1 \cdot q_2 + n_2 \cdot q_1 + q_1 \cdot q_2 \cdot d) \cdot d \end{aligned}$$

da cui segue $m_1 \cdot m_2 \equiv_d n_1 \cdot n_2$.

La proprietà **3** segue immediatamente dalla **2**.

Somma dei primi n numeri naturali. Dimostriamo che

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{h=1}^{n} h = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proponiamo due modi di calcolare la somma dei numeri naturali da 1 a n.

1. *Induzione.* L'induzione è un metodo dimostrativo utile per provare proposizioni relative ai numeri naturali o ad essi riconducibili, l'idea intuitiva è quella delle tessere del domino: per prima cosa si mostra che la prima tessera cade (*passo base*), poi si prova che se cade la tessera n-esima, allora deve necessariamente cadere anche la $n+1$-esima (*passo induttivo*), da questo si deduce che ogni tessera cade, ossia la nostra proposizione è vera per ogni n naturale.

Passo base, $n = 1$: totalmente ovvio, $1 = (1 \cdot 2)/2$.

Passo induttivo, $n \Rightarrow n + 1$: supponiamo che $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (questa si chiama *ipotesi induttiva*, stiamo supponendo che la nostra formula sia vera per un certo n fissato) e da ciò proviamo che

$$1 + 2 + ... + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ovvero la validità della formula per l'intero successivo. Usando l'ipotesi induttiva avremo

$$[1 + 2 + ... + n] + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

che è la tesi cercata. Questo conclude la dimostrazione in virtù del principio di induzione.

2. *Double counting.* Letteralmente 'contare due volte'.

Costruiamo una griglia con 2 righe ed n colonne, sulla prima riga disponiamo i numeri da 1 a n, sulla seconda disponiamo i numeri da n a 1.

1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
n	$n-1$	$n-2$	...	3	2	1

Detta S la somma dei numeri da 1 a n, avremo che la somma di tutti i numeri presenti nella griglia sarà esattamente $2S$, basta osservare che la somma dei numeri su ciascuna riga è proprio S.

Se adesso sommiamo per colonna, osserviamo che la somma dei due numeri su ciascuna colonna è $n+1$, ed avendo n colonne, la somma dei numeri che compongono la griglia sarà $n(n + 1)$.

Abbiamo contato in due modi diversi la stessa quantità, dunque avremo $2S = n(n+1)$, che dà la tesi.

Somma dei primi n quadrati dei numeri naturali. Dimostriamo che

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ovviamente anche questo si può provare per induzione, è un buon esercizio per prendere la mano. Proponiamo però una soluzione via double counting.

Chiamiamo S la somma dei quadrati. Consideriamo tre triangoli equilateri di lato n e riempiamo ciascun triangolo nel modo seguente: scriviamo 1 sul vertice più in alto, due volte 2 nella riga sotto, tre volte 3 nella riga sotto e così via fino ad arrivare in fondo al nostro triangolo dove scriveremo n volte n.

Di questi tre triangoli identici, fissiamo il primo, ruotiamo il secondo di $60°$ in senso orario rispetto al suo centro e il terzo di $120°$, a questo punto avremo tre triangoli con tre griglie distinguibili in quanto l'unico 1 sarà presente in ciascun triangolo vicino ad un vertice in particolare (rispettivamente in alto, in basso a destra, in basso a sinistra). La Figura 1 illustra la costruzione nel caso $n = 4$.

FIGURA 1

Adesso sovrapponiamo questi tre triangoli: la somma dei numeri scritti su ogni triangolo è S, quindi avendo tre facce, la somma complessiva sarà $3S$.

Notiamo che così facendo otteniamo in ogni "cella" tre numeri sovrapposti che hanno sempre somma $2n+1$. Nella figura le celle sovrapposte sono quelle identificate dallo stesso colore.

Siccome abbiamo esattamente $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ celle, otteniamo in totale $\frac{(2n+1)n(n+1)}{2}$.

Ma allora, $3S = \frac{(2n+1)n(n+1)}{2}$ che dà la tesi.

Somma dei primi n cubi dei numeri naturali. Proviamo che

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \sum_{h=1}^{n} h^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 .$$

Procediamo per induzione.

Passo base, $n = 1$: molto facile, $1^3 = \left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2$.

Passo induttivo, $n \Rightarrow n + 1$: per ipotesi induttiva $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, quindi

$$\begin{aligned}[1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3] + (n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \left[n^2 + 4n + 4\right] \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 .\end{aligned}$$

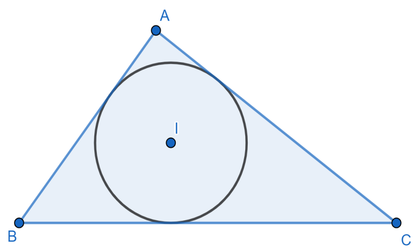
Progressione geometrica. Una progressione geometrica è una sequenza della forma $1, a, a^2, ..., a^n$ con $a \neq 0$ (scartiamo il caso $a = 0$ perché dà una sequenza banale).

Un caso facile è quello in cui $a = 1$, in tal caso la successione vale costantemente 1 e $1 + a + a^2 + ... + a^n = n + 1$.

Proviamo che, se $a \neq 1$, allora
$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \sum_{h=0}^{n} a^h = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$
Anche questa dimostrazione si può fare per induzione, ma vediamo un altro metodo.

Se poniamo
$$S = 1 + a + a^2 + ... + a^n\,,$$
allora avremo che
$$aS = a + a^2 + a^3 + ... + a^{n+1}$$
e dunque
$$S(a-1) = aS - S = (a + a^2 + a^3 + ... + a^{n+1}) - (1 + a + a^2 + ... + a^n) = a^{n+1} - 1\,.$$
Ora per ipotesi $a \neq 1$, quindi dividendo per $a - 1$ si ha $S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Raggio della circonferenza inscritta ad un triangolo. Consideriamo il triangolo ABC di incentro I e siano D, E, F i punti di tangenza della circonferenza inscritta rispettivamente ai lati AB, BC, AC.



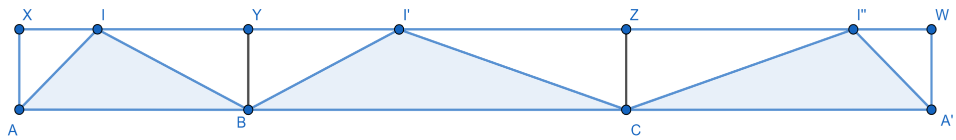


FIGURA 2

Si vengono a determinare i tre triangoli AIB, BIC, CIA, adesso 'apriamo' il triangolo ABC come se tagliassimo lungo i lati dei triangoli sopra citati.

Allineando i lati AB, BC, CA, troviamo i tre triangoli AIB, BIC, CIA disposti uno accanto all'altro come in Figura 2. Avremo anche prodotto 2 copie del punto A, per comodità chiamiamo A' quella relativa all'ultimo segmento, ovvero CA. Questi triangoli hanno tutti la stessa altezza che è esattamente pari al raggio della circonferenza inscritta. Notiamo inoltre che così facendo abbiamo prodotto 3 copie del punto I che chiamiamo I, I', I''.

Partendo dalla prima copia del punto A, tracciamo un segmento verso l'alto che sia perpendicolare al lato AB e di lunghezza pari al raggio della circonferenza inscritta, sia X l'altro estremo del segmento così determinato.

Facciamo lo stesso a partire da B, C e dalla seconda copia del punto A, cioè A' andando a determinare i punti Y, Z e W.

A seguito di questa costruzione, i punti X, Y, Z, W saranno allineati, inoltre il segmento XY sarà parallelo al segmento AB, il segmento YZ sarà parallelo al segmento BC ed il segmento ZW sarà parallelo al segmento CA'.

Si viene a determinare il rettangolo $AA'WX$, questo ha area pari alla somma delle aree dei rettangoli $ABYX$, $BCZY$, $CA'WZ$. Ma l'area di $ABYX$ è uguale a 2 volte l'area del triangolo AIB, l'area di $BCZY$ è uguale a 2 volte l'area del triangolo BIC e l'area di $CA'WZ$ è uguale a 2 volte l'area del triangolo CIA' che è 2 volte l'area del triangolo CIA.

Sommando tutto, segue che l'area del rettangolo $AA'WX$ è esattamente 2 volte la somma delle aree di AIB, BIC, CIA ovvero 2 volte l'area del triangolo di partenza ABC.

Del resto, l'area del rettangolo è anche *base per altezza* e il nostro rettangolo $AA'WX$ ha base uguale alla somma delle lunghezze dei lati AB, BC, CA' che è la somma delle lunghezze dei lati AB, BC, CA ossia il perimetro del triangolo di partenza ABC e altezza pari alla lunghezza del raggio inscritto.

Abbiamo provato che

$$2A = P \cdot R$$

dove A è l'area del triangolo, P il suo perimetro e R è il raggio della circonferenza inscritta, da cui

$$R = \frac{2A}{P} \,.$$

Istruzioni per le gare a squadre

Queste sono le istruzioni che solitamente vengono date per la gara a squadre, le soluzioni numeriche ai quesiti (salvo poche eccezioni) sono date secondo le seguenti regole.

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142\,, \qquad \sqrt{3} \approx 1,7321\,, \qquad \sqrt{5} \approx 2,2361\,,$$
$$\sqrt{7} \approx 2,6458\,, \qquad \pi \approx 3,1416\,.$$

Primo allenamento

Esercizio 1.1: Caramelle per tutti. Ieri il papà di Anna, Beatrice, Carlo e Dario doveva distribuire loro 20 caramelle, in quanti modi poteva farlo?

`Soluzione:` *1771. Immaginiamo di disporre in riga le 20 caramelle, il problema è equivalente a contare in quanti modi il papà può scegliere di disporre tre* 'barre separatrici' *tra queste così da determinare i quattro intervalli di caramelle che spetteranno a ciascuno figlio.*

Ad esempio, se il padre scegliesse di piazzare le 3 barre alla sinistra della riga di caramelle, avremmo una stringa del tipo

$$|\,|\,|\bullet$$

e in questa configurazione le caramelle andrebbero tutte a Dario.

Se invece il padre volesse darne 8 *ad Anna,* 3 *a Beatrice,* 2 *a Carlo,* 7 *a Dario, avremmo la stringa*

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet|\,\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

.

Alla fine occorre stabilire in quanti modi si possono posizionare in riga 23 *oggetti:* 20 *caramelle e* 3 *barre separatrici. Per fare questo è sufficiente contare in quanti modi si possono disporre le* 3 *barre separatrici sulle* 23 *caselle disponibili, le caramelle andranno a finire nelle caselle rimaste vuote. Si tratta quindi di selezionare* 3 *elementi da un insieme di* 23 *(come direbbe un inglese "23 choose 3" ovvero "23 scegli 3"), quindi il risultato è*

$$\binom{20+3}{3} = \binom{23}{3} = \frac{23!}{20!\,3!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{6} = 23 \cdot 11 \cdot 7 = 1771.$$

Un'ulteriore interpretazione del problema è la seguente: contare tutti gli anagrammi di una parola costituita da 20 *lettere 'C' (caramella) e* 3 *'B' (barra separatrice).*

Esercizio 1.2: Altre caramelle per tutti. Oggi il papà di Anna, Beatrice, Carlo e Dario vuole distribuire 22 caramelle di modo che Anna e Carlo ne ricevano entrambi un numero dispari. In quanti modi è possibile farlo?

`Soluzione:` *0506. Nella risoluzione facciamo uso delle formule di somma dei numeri naturali da* 1 *a n e di somma dei quadrati dei numeri naturali da* 1 *a n di cui si trova una dimostrazione nell'Introduzione.*

Sia k la somma dei numeri di caramelle ricevute da Anna e Carlo. Questo numero è somma di due numeri dispari, dunque è pari e vale $2 \le k \le 22$. Osserviamo che questo può essere scritto come somma di due numeri dispari in $k/2$ modi tenuto conto dell'ordine degli addendi. Questo equivale a dire che se il papà sceglie di dare in totale k caramelle ad Anna e Carlo, allora avrà $k/2$ modi distinti di distribuirne un numero dispari ad entrambi.

Ciascuna di queste configurazioni va moltiplicata per il numero di modi in cui le restanti $22-k$ caramelle possono essere distribuite a Beatrice e Carlo che è $23-k$.

Infine, tenuto conto che k può essere scelto come un qualunque numero pari compreso tra 2 *e* 22 *avremo per soluzione:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{2\le k\le 22\\ k\,pari}} \frac{k}{2}(23-k) &= \sum_{h=1}^{11} h(23-2h)\\
&= 23\sum_{h=1}^{11} h \;-2\sum_{h=1}^{11} h^2\\
&= 23\cdot\frac{11\cdot 12}{2} \;-\; 2\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}\\
&= \frac{23\cdot 11\cdot 12}{6} = 23\cdot 11\cdot 2 = 506.
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.3: Domani dentista. In quanti modi posso dividere un pacchetto con 52 caramelle tra 8 persone in modo che ognuno ne riceva almeno 6?

`Soluzione:` *0330. Per prima cosa distribuiamo* 6 *caramelle ciascuno, ne restano* $52-6\cdot 8=4$ *da distribuire ad* 8 *persone, la soluzione, procedendo in modo analogo all'Esercizio 1.1, è*

$$\binom{4+7}{7}=\binom{11}{7}=\frac{11!}{7!\,4!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=11\cdot 10\cdot 3=330\,.$$

Esercizio 1.4: Fino a 15. Quante sono le quaterne di numeri naturali (anche 0) tali che la loro somma sia minore o uguale a 15?

`Soluzione:` *3876. Osserviamo che contare in quanti modi possiamo scegliere* 4 *numeri naturali la cui somma sia minore o uguale a* 15 *equivale a contare in quanti modi possiamo scegliere* 5 *numeri naturali di modo che la loro somma sia esattamente* 15*, infatti se* $a+b+c+d\le 15$*, allora esiste ed è unico il numero naturale* k *tale che* $a+b+c+d+k=15$*, questo è esattamente* $k=15-a-b-c-d$*.*

Abbiamo dimostrato che ad ogni quaterna di numeri naturali con somma ≤ 15 *possiamo associare un'unica quintupla di numeri naturali con somma* 15*, quindi il problema è equivalente a contare le quintuple di numeri naturali (anche* 0*), la cui somma fa* 15*, che è equivalente a contare in quanti modi un padre può distribuire* 15 *caramelle a* 5 *figli.*

La soluzione è

$$\binom{15+4}{15}=\binom{19}{15}=\frac{19!}{15!\,4!}=\frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=19\cdot 6\cdot 17\cdot 2=3876\,.$$

Esercizio 1.5: Male che vada... la tiro a indovinare. Sapendo che 2^{29} è un numero di 9 cifre distinte, trovare la cifra mancante.

`Soluzione:` *0004. Per risolvere questo problema utilizziamo strumenti di base dell'algebra modulare (vedi Introduzione), faremo uso delle proprietà **2** e **3**.*

Osserviamo che $2^3=8\equiv_9 -1$*, dalla **3** segue che* $2^{27}=(2^3)^9\equiv_9(-1)^9=-1$*.*

*Dalla proprietà **2** si ha che* $2^{29}=2^2\cdot 2^{27}\equiv_9 2^2\cdot(-1)=-4\equiv_9 5$*.*

Usiamo il fatto che la classe di resto modulo 9 *di un numero coincide con la classe di resto modulo* 9 *della somma delle sue cifre: se infatti la scrittura decimale del numero* n *è data da* $n=a_0a_1...a_k$*, si ha che* $n=10^k a_k+...+10a_1+a_0$*, ma ogni potenza di* 10 *è congrua ad* 1 *modulo* 9*, da cui* $n\equiv_9 a_0+a_1+...+a_k$*. Pertanto, la somma delle cifre di* 2^{29} *è congrua a* 5 *modulo* 9*. Sottolineiamo che il criterio di divisibilità per nove imparato da piccoli* "un numero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 9" *deriva da questa proprietà.*

Ora notiamo che $0+9=1+8=2+7=3+6=4+5=9$*, quindi la somma di tutte e dieci le cifre è congrua a* 0 *modulo* 9*, cioè* $0+1+2+...+8+9\equiv_9 0$*. Siccome è noto* *dal problema che in 2^{29} compaiono tutte le cifre tranne una, chiamiamola x, si deve avere che la somma delle cifre di 2^{29} è*

$$S = (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) - x$$

e quindi abbiamo $S \equiv_9 -x$, ovvero la somma delle cifre deve essere congrua a $-x$ modulo 9. Abbiamo già mostrato che $S \equiv_9 2^{29} \equiv_9 5$. Quindi $x \equiv_9 -S \equiv_9 -5$, da cui $x \equiv_9 4$. Quindi la cifra mancante è proprio 4.

Esercizio 1.6: Questa magari no... meglio pensarci. La scrittura decimale di 2022! con quanti zeri termina?

`Soluzione:` *0503. Per contare con quanti zeri termina la scrittura decimale di un numero naturale dobbiamo determinare la massima potenza di 10 che divide il numero in questione.*
Supponiamo che 2^α e 5^β siano rispettivamente la massima potenza di 2 e di 5 che divide $2022! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$, la nostra soluzione sarà esattamente il minimo tra questi due esponenti.
Per determinare β osserviamo che 2022! guadagna almeno un fattore 5 nella sua decomposizione in corrispondenza dei multipli di 5 minori o uguali a 2022: in particolare, i multipli di $5^1 = 5$ che NON sono multipli di $5^2 = 25$ contribuiranno facendo aumentare β esattamente di 1.

Analogamente, β aumenta esattamente di 2 in corrispondenza dei multipli di $5^2 = 25$ che NON sono multipli di $5^3 = 125$, aumenta di 3 in corrispondenza dei multipli di $5^3 = 125$ che NON sono multipli di $5^4 = 625$ ed aumenta di 4 in corrispondenza dei multipli di $5^4 = 625$ che NON sono multipli di $5^5 = 3125$.

Osserviamo infine che non c'è alcun multiplo di 5 che può fare aumentare β di 5 o più in quanto dovrebbe trattarsi di un multiplo di $5^5 = 3125$, il quale è però maggiore di 2022.

Per concludere andiamo a contare i multipli di 5^k che dividono 2022!: tenuto conto che questi sono della forma $5^k, 2 \cdot 5^k, 3 \cdot 5^k, \ldots$ ne avremo esattamente $\lfloor \frac{2022}{5^k} \rfloor$.

Con $\lfloor x \rfloor$ intendiamo la parte intera inferiore *di un numero reale positivo x definita come $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$, ovvero il più grande naturale minore o uguale a x. Per esempio, $\lfloor 13,9803 \rfloor = 13$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.*

Dal momento che i multipli di 5^k che NON sono multipli di 5^{k+1} e che dividono 2022! sono esattamente $\lfloor \frac{2022}{5^k} \rfloor - \lfloor \frac{2022}{5^{k+1}} \rfloor$ e tenuto conto che ciascuno fa aumentare β esattamente di k, si ha

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{k=1}^{4} k\left(\left\lfloor \frac{2022}{5^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{5^{k+1}} \right\rfloor\right) \\ &= \left\lfloor \frac{2022}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{625} \right\rfloor \\ &= 404 + 80 + 16 + 3 = 503.\end{aligned}$$

Osserviamo infine che non occorre neppure determinare α in modo esplicito (il che sarebbe possibile ripetendo in modo del tutto analogo il ragionamento precedente), infatti è evidente che $\beta < \alpha$ in quanto i fattori 2 in 2022! sono più frequenti dei fattori 5: questo argomento può essere formalizzato semplicemente osservando che per ogni k naturale

$$\left\lfloor \frac{2022}{5^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2022}{2^k} \right\rfloor$$

e che se $\lfloor \frac{2022}{5^k} \rfloor > 0$, allora anche $\lfloor \frac{2022}{2^k} \rfloor > 0$.

Esercizio 1.7: Due pezzi da sessanta. Si consideri il quadrilatero $ABCD$ tale che $\overline{AB} = 1000\sqrt{3}$. Se $\angle BDA = \angle BCA = 60°$, quanto vale al massimo $\overline{CD}$?

`Soluzione:` *2000. Consideriamo la circonferenza Γ_{ABC} circoscritta al triangolo ABC. Poichè l'angolo $\angle ACB$ è di $60°$, qualsiasi altro angolo alla circonferenza sullo stesso arco che insiste su AB avrà la medesima ampiezza. Si ha allora che anche il punto D sta sulla circonferenza Γ_{ABC}.*

Se entrambi i punti C e D sono costretti a stare su Γ_{ABC}, allora la loro distanza massima è pari al diametro della circonferenza. Dobbiamo quindi calcolare quanto vale il raggio della circonferenza Γ_{ABC} sapendo che che $AB = 1000\sqrt{3}$ e che gli angoli che insistono su di esso sono di $60°$.

Sia P punto di intersezione tra l'asse del segmento AB e la circonferenza Γ_{ABC} appartenente all'arco a cui appartiene il punto C: il triangolo ABP è isoscele per costruzione ed è tale che $\angle APB = 60°$, dunque è equilatero.

In un triangolo equilatero si ha che il raggio della circonferenza circoscritta è pari a $R = \frac{2h}{3}$ e $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, da cui otteniamo $R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. Sostituendo segue $R = 1000$ e il diametro vale 2000.

Esercizio 1.8: Il quadrato sbieco. Quattro quadrati di lato 2 vengono piazzati agli angoli di un quadrato di lato pari a 6 (vedi Figura 3). I punti W, X, Y, Z rappresentano i vertici di ciascuno dei quattro quadrati, come si può vedere in figura. Costruiamo un quadrato $ABCD$ facendo in modo che i lati passino attraverso ciascuno dei vertici W, X, Y e Z. Qual è la massima distanza possibile tra A e P?

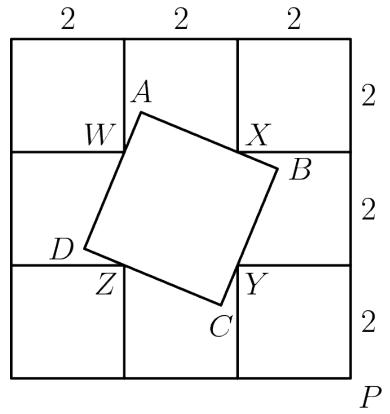


FIGURA 3

`Soluzione:` *0006. Tracciamo il segmento WX e chiamiamo M il suo punto medio. Dal momento che il triangolo WXA è retto per costruzione, questo risulta essere inscritto nella circonferenza di centro M e raggio $\overline{WM} = 1$, da cui segue in particolare che $\overline{AM} = 1$.*

Ora osserviamo che MP è l'ipotenusa del triangolo rettangolo descritto dai punti P, M e dalla proiezione del punto M sul lato inferiore del quadrato più grande di lato 6, pertanto la sua lunghezza è esattamente $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Dalla disuguaglianza triangolare segue dunque che $\overline{AP} \leq \overline{AM} + \overline{MP} = 6$ e questa distanza massima si ottiene quando i punti A, M, P sono allineati.

Esercizio 1.9: Divisori massimali. Dato un numero naturale N diciamo che un suo divisore d è *massimale* se N/d e d sono primi tra loro (ovvero il loro massimo comune divisore è 1). Dire quanti sono i divisori massimali di 30!.

`Soluzione:` *1024. I fattori primi che compaiono nella decomposizione di $30!$ sono tutti e soli i numeri primi compresi tra 1 e 30, dunque per opportuni $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{10}$ maggiori o uguali a 1, avremo*

$$30! = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot 13^{\alpha_6} \cdot 17^{\alpha_7} \cdot 19^{\alpha_8} \cdot 23^{\alpha_9} \cdot 29^{\alpha_{10}}.$$

Ragionando come nell'Esercizio 1.6*, potremmo determinare esattamente i valori di tali esponenti, in particolare si ha*

$$\alpha_1 = 26,\ \alpha_2 = 14,\ \alpha_3 = 7,\ \alpha_4 = 4,\ \alpha_5 = \alpha_6 = 2,\ \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} = 1$$

tuttavia ai fini dell'esercizio non è necessario svolgere questi conti.

La soluzione segue da questa osservazione: siano p_i, $i = 1,..,10$ i primi ordinati che dividono 30! *e sia d un divisore di* 30!*; dimostriamo che d è un divisore massimale se e solo se per ogni $j \in \{1, ..., 10\}$ vale la seguente proprietà:*

$$p_j \text{ divide } d \implies p_j^{\alpha_j} \text{ divide } d.$$

Infatti, se un divisore massimale d non avesse questa proprietà, allora esisterebbero un indice $k \in \{1, ..., 10\}$ ed un esponente positivo β_k strettamente minore di α_k tali che

$$p_k^{\beta_k} \text{ divide } d \text{ e } p_k^{\beta_k+1} \text{ non divide } d\,,$$

che implica

$$p_k \text{ divide } \frac{N}{d}\,,$$

che ci dà $MCD(d, N/d) \geq p_k > 1$, contravvenendo l'ipotesi che d sia divisore massimale.

Viceversa se un divisore d ha la suddetta proprietà, è ovviamente massimale in quanto per ogni $j \in \{1, ..., 10\}$ tale che p_j divide d si ha

$$p_j \text{ divide } d \implies p_j^{\alpha_j} \text{ divide } d \implies p_j \text{ non divide } \frac{N}{d}$$

e dunque d e N/d non hanno divisori primi in comune, ovvero d è massimale.

Alla fine, un divisore massimale di 30! *si ottiene scegliendo quali primi dei* 10 *disponibili compaiono nella sua fattorizzazione (possiamo anche non scegliere alcun primo così da ottenere* 1 *che è divisore massimale, oppure possiamo prenderli tutti visto che anche* 30! *è divisore massimale). Una volta scelti, questi fattori primi dovranno comparire nella fattorizzazione del divisore massimale necessariamente con l'esponente massimo, quindi i divisori massimali sono tanti quanti sono i modi di scegliere k primi, da un insieme che ne contiene* 10*, dove k va da* 0 *a* 10*.*

Questo è a sua volta equivalente a determinare quanti sottoinsiemi ha un insieme di 10 *elementi, contando anche l'insieme vuoto e tutto l'insieme di partenza.*

Più in generale, dato un insieme di m elementi questo ha 2^m sottoinsiemi (contando anche l'insieme vuoto e l'insieme stesso). Tale risultato si giustifica notando che per ognuno degli m elementi dell'insieme abbiamo 2 *scelte possibili: metterlo nel sottoinsieme che stiamo costruendo, oppure lasciarlo fuori. Quindi la nostra soluzione è $2^{10} = 1024$.*

Esercizio 1.10: Il dado bucato. In un cubo di spigolo 10 viene praticato un foro intersecandolo con un cilindro la cui base è un ellisse, in modo che il foro inizi e finisca su due facce adiacenti e la sezione del foro sulle due facce sia una circonferenza di raggio 5 centrata nel centro della faccia. Quanto vale il volume della parte di cubo rimanente?

`Soluzione:` *0607. Per fissare le idee supponiamo che i fori a sezione uguale ad una circonferenza siano posti sulla faccia rivolta verso l'alto e quella rivolta verso destra. Adesso consideriamo un'ulteriore copia del cubo bucato e ruotiamola di modo che i fori risultino essere praticati sulla faccia rivolta verso il basso e su quella rivolta verso sinistra.*

Incolliamo i due cubi in corrispondenza delle due facce che presentano i fori laterali (cioè incolliamo la faccia destra del primo cubo e la faccia sinistra del secondo). Ne risulta un parallelepipedo in cui è stato praticato un foro a forma di cilindro storto *– o, per meglio dire, non retto – con base una circonferenza di raggio* 5*.*

Il volume del parallelepipedo forato è esattamente il doppio del volume del cubo forato ed è facile da calcolare visto che il volume del cilindro storto *si calcola come se si trattasse di un cilindro retto, dunque la soluzione del problema iniziale sarà*

$$\frac{1}{2}[2 \cdot 10^3 - 5^2\pi \cdot 10] = 1000\left(1 - \frac{\pi}{8}\right) = 1000(1 - 0,392699) = 607,301\,.$$

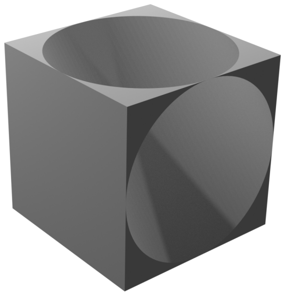


Figura 4

Esercizio 1.11: Triangoli e sette. Quanti triangoli di perimetro pari a 7, diversi tra di loro, è possibile costruire se i lati di ogni singolo triangolo devono avere tutti lunghezza intera?

`Soluzione:` *0002. I triangoli che cerchiamo non possono avere lati di lunghezza* 4 *o più in quanto contraddirebbero immediatamente la disuguaglianza triangolare. Avendo a disposizione lati di lunghezza* $1, 2, 3$*, le uniche terne possibili per le lunghezze dei lati sono* $(1, 3, 3)$ *e* $(2, 2, 3)$*. Trattandosi di triangoli isosceli, a meno di rotazioni abbiamo solo* 2 *triangoli possibili.*

Esercizio 1.12: Sommare divisori. Quanto vale la somma dei divisori dispari di 8100?

`Soluzione:` *3751. Fattorizzando si ha* $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$*. I divisori dispari di* 8100 *sono tutti e soli della forma* $3^a \cdot 5^b$ *dove* $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e* $b \in \{0, 1, 2\}$*, quindi sono in totale* $5 \cdot 3 = 15$*, in quanto abbiamo* 5 *modi di scegliere l'esponente di* 3 *e* 3 *modi di scegliere l'esponente di* 5*. Una strada per risolvere il problema quindi è determinare esplicitamente i* 15 *fattori dispari e poi sommarli.*

Una via alternativa (e più semplice) è osservare che la soluzione è esattamente

$$S = (1 + 3 + 9 + 27 + 81) \cdot (1 + 5 + 25).$$

Infatti sviluppando il conto troviamo una somma i cui addendi sono esattamente tutti e soli i fattori dispari che dividono 8100 *in quanto andiamo a moltiplicare di volta in volta ciascuna potenza di* 3 *che divide* 8100 *per ciascuna potenza di* 5 *che divide* 8100*.*

Per facilitare il conto usiamo la formula per la somma dei termini di una progressione geometrica:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^N = \sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$$

valida per $a \neq 1$ *(vedi Introduzione). Dunque la soluzione vale*

$$S = \frac{1 - 3^5}{1 - 3} \cdot \frac{1 - 5^3}{1 - 5} = \frac{242}{2} \cdot \frac{124}{4} = 121 \cdot 31 = 3751\,.$$

Esercizio 1.13: Le vacanze di Natale. A causa di confusioni burocratiche, quest'anno le vacanze di Natale copriranno un periodo a caso tra l'1 e il 31 dicembre. Sapendo che le vacanze dureranno almeno un giorno e che tutti i possibili periodi hanno la stessa probabilità di essere scelti, qual è la probabilità che il 25 dicembre cada durante le vacanze? Rispondere con somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

`Soluzione:` *0671. Determiniamo casi possibili e favorevoli: il numero di casi possibili è uguale al numero di modi di scegliere due giorni (inizio e fine vacanze, eventualmente anche coincidenti se le vacanze durano un solo giorno) tra i* 31 *disponibili, ovvero* $\binom{31}{2}+31$*, dove la somma è dovuta alla distinzione tra il caso in cui le vacanze durino almeno* 2 *giorni e quello in cui ne durino solo* 1*.*

I casi favorevoli sono quelli in cui la data di inizio è minore o uguale a 25 *e la data di fine è maggiore o uguale a* 25*, dunque sono in totale* $25 \cdot (31 - 25 + 1)$*. Segue la soluzione*

$$\frac{25 \cdot 7}{\binom{31}{2} + 31} = \frac{25 \cdot 7}{\frac{31!}{2!29!} + 31} = \frac{25 \cdot 7}{31 \cdot 15 + 31} = \frac{25 \cdot 7}{31 \cdot 16} = \frac{175}{496}.$$

Esercizio 1.14: A spasso per il d20. Spostandosi sulla superficie di un icosaedro regolare il cui spigolo misura 300, quanto è la distanza minima da percorrere per spostarsi tra 2 vertici opposti?

`Soluzione:` *0793. Consideriamo lo sviluppo sul piano dell'icosaedro.*

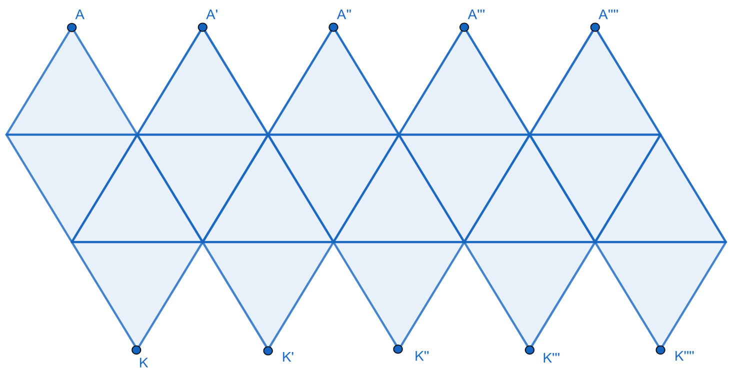


Figura 5

Osserviamo che nello sviluppo 2*-dimensionale dell'icosaedro, alcuni spigoli compaiono ripetuti, in quanto andranno ad identificarsi reincollando la figura* $2D$ *per produrre il solido. Questo giustifica la presenza degli indici nel nome dei vertici indicati in figura:* A, A', A'', A''', A'''' *costituiranno tutti uno stesso vertice* A *dell'icosaedro, stesso discorso per* K, K', K'', K''', K''''*.*

Il problema chiede di determinare la lunghezza del segmento AK *(o equivalentemente di* $A'K'$ *o* $A''K''$ *e così via) che è l'ipotenusa di un triangolo che ha cateto minore pari a metà dello spigolo dell'icosaedro, cioè* 150*, e cateto maggiore pari a* 3 *volte l'altezza del triangolo equilatero che è faccia dell'icosaedro, ossia* $3 \cdot 150\sqrt{3}$*. Pertanto la soluzione è*

$$\sqrt{150^2 + (3 \cdot 150\sqrt{3})^2} = 150\sqrt{28} = 300 \cdot 2,6458 = 793,74\,.$$

Esercizio 1.15: Le talpe. Un gruppo di 15 persone viene selezionato per partecipare a un famoso reality show. Per partecipare alle varie sfide, vengono selezionate ogni giorno 4 persone che hanno come obiettivo quello di vincere la sfida giornaliera per ottenere dei benefici a favore dell'intero gruppo. Delle 15 persone però, sono presenti 3 concorrenti messi apposta dalla produzione per fare in modo che i concorrenti perdano le sfide. In quanti modi si possono scegliere i 4 concorrenti affinché siano presenti almeno due dei tre *impostori*?

`Soluzione:` *0210. Distinguiamo due casi: se tra i 4 concorrenti estratti ci sono già 3 impostori, allora si ha* $\binom{3}{3} = 1$ *modo di scegliere gli impostori e* $\binom{15-3}{1} = \binom{12}{1}$ *modi per completare il quartetto con un altro concorrente.*

Se invece sono presenti solo 2 impostori, abbiamo $\binom{3}{2} = 3$ *modi di selezionarli e* $\binom{15-3}{2} = \binom{12}{2}$ *modi per completare il quartetto con gli altri concorrenti.*

Alla fine la soluzione è

$$\binom{3}{3}\binom{12}{1} + \binom{3}{2}\binom{12}{2} = 1 \cdot \frac{12!}{1!11!} + 3 \cdot \frac{12!}{2!10!} = 12 + 3\frac{12 \cdot 11}{2} = 12 + 3 \cdot 66 = 210.$$

Secondo allenamento

Esercizio 2.1: Ne vogliamo due. Trovare la cifra delle unità e delle decine di 7^{2042}.

`Soluzione:` *0049. Anche qui faremo uso delle proprietà di base dell'algebra modulare presentate nell'Introduzione. In particolare sappiamo che dobbiamo determinare* $k \in \{0, ..., 99\}$ *tale che* $7^{2042} \equiv_{100} k$.

Osserviamo che $7^2 = 49 \equiv_4 1$ *e* $7^2 = 49 \equiv_{25} 24 \equiv_{25} -1$, *pertanto, utilizzando la proprietà **3** dell'algebra modulare, otteniamo che*

$$\begin{cases} 7^{2042} = (7^2)^{1021} \equiv_4 1^{1021} = 1 \\ 7^{2042} = (7^2)^{1021} \equiv_{25} (-1)^{1021} = -1 \equiv_{25} 24. \end{cases}$$

Da quest'ultima segue che la classe di resto di 7^{2042} *modulo* 100 *è da ricercare tra i numeri tra* 0 *e* 99 *che sono congrui a* 24 *modulo* 25, *ovvero tra* $24, 49, 74, 99$. *Tuttavia, il numero cercato deve anche essere congruo a* 1 *modulo* 4, *e l'unico tra quelli elencati ad avere anche questa proprietà è* 49.

Esercizio 2.2: Doppiamente naturale. Siano a e b due interi positivi tali che $\sqrt[3]{18 \cdot a^3 b}$ e $\sqrt{18 \cdot a^3 b}$ sono entrambi numeri naturali. Quanto vale al minimo $a + b$?

`Soluzione:` *0018. Per ipotesi abbiamo che* $\sqrt[3]{18 \cdot a^3 b}$ *è naturale positivo, questo equivale a dire che gli esponenti dei primi che compaiono nella fattorizzazione di* $18 \cdot a^3 b$ *sono tutti multipli di* 3. *Certamente* 2 *e* 3 *dividono* $18 \cdot a^3 b$ *quindi concentriamoci sugli esponenti di questi fattori primi.*

Siano x, y *numeri naturali (eventualmente anche uguali a* 0*) tali che* 2^x *è la massima potenza di* 2 *che divide* a *e* 2^y *è la massima potenza di* 2 *che divide* b, *allora la massima potenza di* 2 *che divide* $18 \cdot a^3 b$ *è* 2^{1+3x+y}, *ma per quanto già osservato* $1 + 3x + y$ *deve essere un multiplo di* 3, *quindi* y *deve essere del tipo* $y = 3k + 2$ *per qualche* k *naturale. Inoltre, poichè* $y = 3k + 2 \geq 2$, *segue che* $2^2 = 4$ *deve dividere* b.

In modo del tutto analogo procediamo con il fattore primo 3*: siano* x, y *numeri naturali (eventualmente anche uguali a* 0*) tali che* 3^x *è la massima potenza di* 3 *che divide* a *e* 3^y *è la massima potenza di* 3 *che divide* b, *allora la massima potenza di* 3 *che divide* $18 \cdot a^3 b$ *è* 3^{2+3x+y}, *ma* $2+3x+y$ *deve essere un multiplo di* 3, *quindi* y *deve essere del tipo* $y = 3k+1$ *per qualche* k *naturale. Inoltre, poichè* $y = 3k + 1 \geq 1$, *segue che* $3^1 = 3$ *deve dividere* b.

Combinando queste due osservazioni deduciamo che b *è multiplo di* 12, *ovvero esiste* n *naturale positivo tale che* $b = 12n$ *da cui segue in particolare* $b \geq 12$.

Volendo minimizzare, proviamo a scegliere $n = 1$, *cioè* $b = 12$.

Adesso $\sqrt{18 \cdot 12 \cdot a^3} = 6\sqrt{2 \cdot 3 \cdot a^3}$ *è naturale positivo, quindi necessariamente anche* $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot a^3}$ *deve essere naturale positivo, ovvero gli esponenti dei primi che compaiono nella fattorizzazione di* $2 \cdot 3 \cdot a^3$ *sono tutti multipli di* 2.

Ripetiamo la strategia precedente concentrandoci sui fattori primi 2 *e* 3 *che certamente dividono* $2 \cdot 3 \cdot a^3$.

Sia x numero naturale (eventualmente anche uguale a 0) tale che 2^x è la massima potenza di 2 che divide a, allora la massima potenza di 2 che divide $2 \cdot 3 \cdot a^3$ è 2^{1+3x}, ma $1+3x$ deve essere un multiplo di 2, quindi x deve essere del tipo $x = 2k+1$ per qualche k naturale. Inoltre, poichè $x = 2k+1 \geq 1$, segue che $2^1 = 2$ deve dividere a.

Analogamente, per il fattore 3, sia x numero naturale (eventualmente anche uguale a 0) tale che 3^x è la massima potenza di 3 che divide a, allora la massima potenza di 3 che divide $2 \cdot 3 \cdot a^3$ è 3^{1+3x}, ma $1+3x$ deve essere un multiplo di 2, quindi x deve essere del tipo $x = 2k+1$ per qualche k naturale. Inoltre, poichè $x = 2y+1 \geq 1$, segue che $3^1 = 3$ deve dividere a.

Combinando queste due osservazioni segue che a è multiplo di 6, ovvero esiste m naturale positivo tale che $a = 6m$ da cui segue in particolare $a \geq 6$.

Se ora poniamo $m = 1$ otteniamo $a = 6$ ed è facile verificare che la coppia $(a, b) = (6, 12)$ soddisfa le richieste del problema, inoltre è davvero quella con somma minima possibile avendo già osservato che $a \geq 6, b \geq 12$.

Esercizio 2.3: Conta che ti passa. Quanti sono i divisori positivi dispari di

$$n = 999999^3 - 143143^3 - 856856^3 \ ?$$

`Soluzione:` *2000. Osserviamo che n è della forma $(a+b)^3 - a^3 - b^3$ dove $a = 143143$ e $b = 856856$.*

Sviluppando il cubo di binomio si ottiene $(a+b)^3 - a^3 - b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b) = 3 \cdot 143143 \cdot 856856 \cdot 999999$.

Un' osservazione utile a semplificare i conti è la seguente: un numero con scrittura decimale del tipo $xyzxyz$ è certamente della forma

$$(100x + 10y + z)1001 = (100x + 10y + z) \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13\,,$$

quindi avremo

$$\begin{aligned} 3 \cdot 143143 \cdot 856856 \cdot 999999 &= 3 \cdot 143 \cdot 856 \cdot 999 \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13)^3 \\ &= 3 \cdot (11 \cdot 13) \cdot (2^3 \cdot 107) \cdot (3^3 \cdot 37) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13)^3 \\ &= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 37 \cdot 107. \end{aligned}$$

I divisori dispari sono tutti e soli della forma $3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot 11^{a_3} \cdot 13^{a_4} \cdot 37^{a_5} \cdot 107^{a_6}$ dove $a_1 \in \{0,1,2,3,4\}$, $a_2 \in \{0,1,2,3\}$, $a_3 \in \{0,1,2,3,4\}$, $a_4 \in \{0,1,2,3,4\}$, $a_5 \in \{0,1\}$, $a_6 \in \{0,1\}$.

Ragionando in modo simile a quanto fatto nell'Esercizio 1.12, essi in totale sono quindi $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2000$.

Esercizio 2.4: Fatti di fattoriali. Determinare il resto della divisione per 100 del numero

$$N = 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 999!$$

`Soluzione:` *0013. Osserviamo che $n!$ è multiplo di 100 per $n \geq 10$, quindi è sufficiente determinare il resto di $1! + 2! + ... + 9!$ nella divisione per 100.*

Per concludere ragioniamo modulo 100, le proprietà dell'algebra modulare rendono il conto piuttosto semplice, infatti

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \equiv_{100} 1\\
2! &= 2 \equiv_{100} 2\\
3! &= 6 \equiv_{100} 6\\
4! &= 24 \equiv_{100} 24\\
5! &= 120 \equiv_{100} 20\\
6! = 6 \cdot 5! \equiv_{100} 6 \cdot 20 &= 120 \equiv_{100} 20\\
7! = 7 \cdot 6! \equiv_{100} 7 \cdot 20 &= 140 \equiv_{100} 40\\
8! = 8 \cdot 7! \equiv_{100} 8 \cdot 40 &= 320 \equiv_{100} 20\\
9! = 9 \cdot 8! \equiv_{100} 9 \cdot 20 &= 180 \equiv_{100} 80
\end{aligned}$$

Quindi la soluzione è

$$\begin{aligned}
1! + 2! + ... + 9! &\equiv_{100} 1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80\\
&\equiv_{100} 1 + 2 + 6 + 24 + 80\\
&\equiv_{100} 1 + 2 + 6 + 4 = 13.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.5: La bisezione dell'angolo retto. Sia ABC un triangolo rettangolo con $\angle BAC = 90°$. Si consideri ora la circonferenza di centro A e raggio AB. Essa incontra i lati AC e BC rispettivamente nei punti D ed E. Se AE è la bisettrice di $\angle BAC$ e $\overline{AB} = 10 \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$, quanto vale l'area di ABC?

`Soluzione:` *0050. Per questo esercizio proporremo due possibili risoluzioni.*

Risoluzione 1. Osserviamo che il triangolo BAE è isoscele in quanto ha due lati uguali ai raggi della circonferenza tracciata. Inoltre per ipotesi $\angle EAB = 45°$, dunque $\angle ABC = \frac{135}{2}°$. Segue che $\overline{AC} = \overline{BC}\sin(135°/2) = \overline{AB} \cdot \frac{\sin(135°/2)}{\cos(135°/2)}$.

Per le formule di bisezione di seno e coseno, si hanno

$$\sin(135°/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos 135°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$\cos(135°/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

da cui

$$\overline{AC} = 10\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}} = 10\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}} = 10\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot (\sqrt{2} + 1).$$

Infine l'area di ABC vale

$$\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot 10\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot (\sqrt{2} + 1) = 50.$$

Risoluzione 2. Questa risoluzione alternativa non usa le formule di bisezione, ma utilizza metodi che si apprendono nel biennio. Siano $x = \overline{AB}, y = \overline{BE}$. I triangoli ABE e AED sono congruenti in quanto hanno il lato AE in comune, $x = \overline{AB} = \overline{AD}$ per costruzione e per ipotesi AE è bisettrice dell'angolo retto $\angle BAC$, da cui $\angle DAE = \angle EAB$. Segue quindi che $\overline{DE} = y$. Il triangolo AED è isoscele e $\angle DAE = 45°$, quindi $\angle AED = (180-45)°/2 = 135°/2$.

Osserviamo inoltre che da questo segue $\angle ABE = \angle AED = 135°/2$, ma $\angle ABE = \angle ABC$ da cui $\angle ABC = 135°/2$.

Allo stesso modo $\angle AEB = 135°/2$, quindi per differenza $\angle DEC = 45°$.

Sia ora D' il punto simmetrico a D rispetto al segmento CE, si viene a formare il quadrilatero $DED'C$. Per costruzione $\angle DED' = 2\angle DEC = 90°$, quindi DED' è un triangolo rettangolo isoscele con cateto di lunghezza $\overline{DE} = y$, dunque $\overline{DD'} = y\sqrt{2}$.

Adesso proviamo che il triangolo $DD'C$ è simile al triangolo ABE: è sufficiente osservare che è isoscele e che vale $\angle DCD' = \angle EAD$ in quanto $\angle DCD' = 2\angle DCE$ per costruzione, ma per differenza $\angle DCE = \angle ACB = 45°/2$ da cui $\angle DCD' = 45° = \angle EAD$.

Dato che i lati BE e DD' sono associati per similitudine, si ha che il fattore di proporzionalità di similitudine è $\sqrt{2}$, da cui $\overline{CD} = \sqrt{2}\overline{AB} = x\sqrt{2}$.

Per concludere abbiamo $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = x + x\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})x$ e $x = \overline{AB} = 10 \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}$ per ipotesi. Dunque l'area del triangolo ABC vale

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \cdot 10\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot 10\sqrt{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \cdot 100 = 50.$$

Esercizio 2.6: Tanti punti per tanti trapezi. In quanti modi 3600 è somma di dispari consecutivi? Somme ottenute invertendo l'ordine degli addendi vanno considerate uguali.

`Soluzione:` *0014. Cerchiamo naturali positivi m, n tali che*

$$3600 = \sum_{k=m}^{m+n}(2k+1) = 2\sum_{k=m}^{m+n} k + \sum_{k=m}^{m+n} 1.$$

Adesso sostituiamo l' indice k con $h = k - m$ così da avere

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=m}^{m+n} k + \sum_{k=m}^{m+n} 1 &= 2\sum_{h=0}^{n}(h+m) + \sum_{h=0}^{n} 1 = 2\sum_{h=0}^{n} h + 2\sum_{h=0}^{n} m + \sum_{h=0}^{n} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2m(n+1) + n + 1 = (n+1)(n+2m+1). \end{aligned}$$

Quindi

$$(n+1)(n+2m+1) = 3600\,.$$

Osserviamo che n deve essere dispari visto che 3600 è pari, inoltre $2m+n+1 \geq n+1$ implica che $60 \geq n+1$, altrimenti avremmo $2m+n+1 \geq n+1 > 60$ da cui $(n+1)(n+2m+1) > 3600$, ottenendo un assurdo. Cerchiamo quindi n dispari, $n \leq 59$ per i quali esiste un naturale m che soddisfi $3600 = (n+1)(2m+n+1)$.

Riarrangiando si ha

$$\frac{3600}{n+1} - (n+1) = 2m,$$

quindi, posto d=n+1, cerchiamo d divisore pari di 3600 che sia minore o uguale a 60 e tale che $\frac{3600}{d} - d$ sia un numero pari.

Dato che $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, i divisori d su cui testare sono 16 e sono esattamente: $2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 48, 50, 60$. Ora basta osservare che $\frac{3600}{d} - d$ è pari se e solo se $\frac{3600}{d}$ è pari e questo si verifica quando d è uno qualunque dei valori sopra elencati ad eccezione di 16 e 48 che 'esauriscono' le potenze di 2 nella fattorizzazione di 3600. Dei 16 candidati ne abbiamo scartati 2, quindi la soluzione è 14.

Esercizio 2.7: Mai tutte assieme. La squadra di pallavolo di una scuola è formata da 14 ragazze. Di queste, 3 sono gemelle: Lucia, Matilde e Noemi. In quanti modi possiamo scegliere un gruppo di 6 ragazze da far entrare in campo a inizio partita sapendo che le gemelle non possono stare tutte e tre assieme nello stesso momento in campo?

`Soluzione:` *2838. Contiamo tutti i casi possibili e poi sottraiamo quelli in cui tutte e 3 le gemelle sono in campo contemporaneamente.*

I casi totali sono $\binom{14}{6} = \frac{14!}{6!8!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3 = 3003$.

I casi in cui tutte le gemelle sono in campo sono invece $\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 11 \cdot 3 \cdot 5 = 165$ in quanto si tratta di scegliere i restanti 3 membri della squadra da 11 disponibili.

Segue la soluzione $3003 - 165 = 2838$.

Per una soluzione alternativa, chiamiamo k *il numero di gemelle in campo ad inizio partita, avremo* $\binom{3}{k}$ *modi di scegliere le gemelle in campo e* $\binom{14-3}{6-k} = \binom{11}{6-k}$ *modi per completare la squadra. Dal momento che* k *può essere* $0, 1$ *o* 2, *sommando i tre casi prima descritti avremo soluzione*

$$\begin{aligned}\binom{3}{0}\binom{12}{6} + \binom{3}{1}\binom{11}{5} + \binom{3}{2}\binom{11}{4} &= \frac{3!}{0!3!}\frac{12!}{6!6!} + \frac{3!}{1!3!}\frac{11!}{5!6!} + \frac{3!}{2!1!}\frac{11!}{4!7!} \\ &= 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 + 3 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 + 3 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \\ &= 4 \cdot 42 \cdot 11 + 990 \\ &= 4 \cdot 462 + 990 = 2838.\end{aligned}$$

Esercizio 2.8: Incentro. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AC. Sia Γ la circonferenza ad esso inscritta, tangente ai tre lati AB, BC ed AC nei punti D, E ed F rispettivamente. Se $CF = 35$ ed $AF = 18$, quanto vale l'area di Γ?

`Soluzione:` *0314. Per il teorema della tangente, valgono le seguenti uguaglianze:* $\overline{DA} = \overline{AF} = 18$, $\overline{FC} = \overline{CE} = 35$, $\overline{EB} = \overline{BD} = x$.

Per determinare x *utilizziamo il teorema di Pitagora, vale infatti*

$$(18 + x)^2 + (35 + x)^2 = (18 + 35)^2 \,,$$

da cui otteniamo

$$2x^2 + 106x - 53^2 + 18^2 + 35^2 = 0 \,.$$

e quindi

$$x^2 + 53x - 630 = 0 \,.$$

Per ottenere il valore 630 è utile osservare che possiamo rendere più semplice il calcolo del valore 630 nel seguente modo: poniamo $\alpha = 18$ *e* $\beta = 35$ *e notiamo che*

$$\begin{aligned}53^2 - 18^2 - 35^2 &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 \\ &= 2\alpha\beta = 2 \cdot 630 \,.\end{aligned}$$

Si tratta di risolvere l'equazione sopra la cui unica soluzione positiva è

$$\frac{-53 + \sqrt{53^2 + 2520}}{2} = \frac{-53 + \sqrt{5329}}{2} = \frac{-53 + 73}{2} = 10 \,.$$

Notiamo che quindi ABC *ha cateti di lunghezza* $10 + 18 = 28$ *e* $10 + 35 = 45$. *Ora, per la formula del raggio della circonferenza inscritta ad un triangolo (vedi Introduzione), si ha*

$$R_\Gamma = \frac{2Area}{Perimetro} = \frac{28 \cdot 45}{28 + 45 + 53} = \frac{28 \cdot 45}{126} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}{2 \cdot 7 \cdot 9} = 10 \,.$$

Dunque l'area di Γ *vale* $100\pi = 314,16$.

Finale alternativo: possiamo dimostrare che x *è proprio il raggio della circonferenza inscritta con una semplice osservazione geometrica, senza ricorrere alla formula precedente.*

Detto I *il centro della circonferenza inscritta al triangolo* ABC, *dal momento che* D *è il punto di tangenza di tale circonferenza al lato* AB, *si ha che* ID *è perpendicolare a* AB, *quindi* $\angle IDB = 90°$. *In modo analogo* IE *è perprendicolare a* BC, *quindi* $\angle IEB = 90°$.

Dato che $\angle ABC = 90°$, *segue che* $\angle EBD = 90°$.

Allora, per differenza, $\angle EID = 90°$ *e il quadrilatero* $IEBD$ *è un rettangolo dove i lati consecutivi* DI, IE *hanno la stessa lunghezza essendo entrambi raggi della circonferenza inscritta. Pertanto* $IEBD$ *è un quadrato e* $x = \overline{BE} = \overline{IE}$ *che è proprio la lunghezza rel raggio della circonferenza inscritta.*

Esercizio 2.9: Un Polinomietto. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2008 tale che $p(3) = p(4) = \ldots = p(2010) = 7$, mentre $p(2011) = \frac{50}{7}$. Quanto vale la somma dei coefficienti di $p(x)$?

`Soluzione:` *0294. Sia $q(x)$ il polinomio definito come $q(x) = p(x) - 7$.*

Il polinomio $q(x)$ ha ancora grado 2008, e di lui conosciamo tutte le sue radici, infatti vale

$$q(3) = q(4) = \ldots = q(2010) = 0\,.$$

In particolare: $q(x) = c(x-3)(x-4)...(x-2010)$ dove c è un numero reale. Per determinare c osserviamo che $p(2011) = \frac{50}{7}$ e quindi $q(2011) = \frac{1}{7}$, ora però, $q(2011) = c \cdot 2008!$ da cui $c = \frac{1}{7 \cdot 2008!}$.

Per concludere notiamo che la somma dei coefficienti di un polinomio si ottiene semplicemente valutandolo in 1, quindi non resta che calcolare

$$p(1) = q(1) + 7 = \frac{1}{7 \cdot 2008!} \underbrace{(1-3)(1-4)...(1-2009)}_{=-2008!}(1-2010) + 7 = \frac{2009}{7} + 7 = 294.$$

Esercizio 2.10: Il circocentro del quadrilatero. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico (ovvero che ammette una circonferenza circoscritta). Sapendo che $AB = 6$, $CD = 4$, $AD = 2BC$ e che il prodotto delle sue diagonali è pari a 3AD, calcolare l'area del quadrilatero.

`Soluzione:` *0000. Per risolvere questo esercizio bisogna conoscere il Teorema di Tolomeo. Esso enuncia:* Un quadrilatero è inscritto in una circonferenza se e solo se la somma dei prodotti delle coppie di lati opposti è uguale al prodotto delle sue diagonali. *La formula che entra in gioco nell'enunciato è quindi*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD\,.$$

Nel nostro caso, ponendo $BC = x$ troviamo

$$6 \cdot 4 + 2x^2 = 6x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 12 = 0\,,$$

che non dà soluzioni reali. L'esercizio non ha soluzioni.

Esercizio 2.11: La prima armonica del polinomio. Siano α, β, γ le radici reali del polinomio

$$x^3 + \frac{26}{15}x^2 - \frac{41}{3}x + \frac{40}{3}\,.$$

Quanto vale

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}} \ ?$$

Fornire come risultato la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini

`Soluzione:` *0081. Sviluppando si ha*

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}.$$

Ora osserviamo che, fattorizzando un generico polinomio di terzo grado come

$$p(x) = c(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

possiamo ricostruire i suoi coefficienti svolgendo tutti i prodotti, ottenendo

$$p(x) = cx^3 + c(-\alpha-\beta-\gamma)x^2 + c(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x + c(-\alpha\beta\gamma).$$

Uguagliando i coefficienti col polinomio di partenza si ottengono le relazioni

$$c = 1$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{26}{15}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{41}{3}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{40}{3}.$$

In conclusione, $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma} = \frac{40}{41}$.

Esercizio 2.12: Buone parole. Diciamo *buona* una parola composta dalle sole lettere a, b, c, d con la seguente proprietà: se compaiono due consonanti consecutive, queste non sono mai uguali. Quante *parole* buone di 8 lettere iniziano con la lettera b?

`Soluzione:` *3927. Siano* B_n *le parole buone di* n *lettere,* V_n *quelle che finiscono per vocale e* C_n *quelle che finiscono per consonante; si ha ovviamente* $B_n = V_n + C_n$. *Osserviamo che* $V_{n+1} = B_n$ *poichè basta aggiungere l'unica vocale disponibile a ciascuna parola buona di* n *lettere, mentre* $C_{n+1} = 3V_n + 2C_n$ *in quanto se una parola buona di* n *lettere termina per vocale possiamo aggiungere una qualsiasi delle tre consonanti, mentre se termina per consonante ne restano solo due disponibili per evitare la ripetizione della stessa.*

Sommando queste due si ottiene $B_{n+1} = V_{n+1} + C_{n+1} = B_n + 3V_n + 2C_n = B_n + 2B_n + V_n$, *ma* $V_{n+1} = B_n \Rightarrow V_n = B_{n-1}$, *da cui* $B_{n+1} = 3B_n + B_{n-1}$.

Adesso possiamo calcolare ricorsivamente le parole buone fino al passo desiderato tenuto conto che l'unica parola buona che inizia con la lettera 'b' di lunghezza 1 *è 'b', ovvero* $B_1 = 1$, *mentre quelle lunghe* 2 *sono 'bc','bd','ba', ovvero* $B_2 = 3$.

In conclusione

$$\begin{aligned}
B_3 &= 3B_2 + B_1 = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 10 \\
B_4 &= 3B_3 + B_2 = 3 \cdot 10 + 1 \cdot 3 = 33 \\
B_5 &= 3B_4 + B_3 = 3 \cdot 33 + 1 \cdot 10 = 109 \\
B_6 &= 3B_5 + B_4 = 3 \cdot 109 + 1 \cdot 33 = 360 \\
B_7 &= 3B_6 + B_5 = 3 \cdot 360 + 1 \cdot 109 = 1189 \\
B_8 &= 3B_7 + B_6 = 3 \cdot 1189 + 1 \cdot 360 = 3927.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.13: L'equazione di Ofantea. Quante sono le coppie di numeri interi che risolvono l'equazione $5x + 11y = 13$?

`Soluzione:` *9999. Osserviamo che* $5(-2) + 11(1) = 1$, *moltiplicando per* 13 *ambo i membri e raccogliendo opportunamente si ha* $5(-26) + 11(13) = 13$, *ovvero* $(-26, 13)$ *è una soluzione cercata. Tuttavia è facile verificare, sostituendo nell'equazione, che ogni coppia della forma* $(-26 + 11k, 13 - 5k)$ *è soluzione al variare di* k *tra i numeri interi (quindi anche negativi). Dunque si hanno infinite soluzioni.*

Osserviamo inoltre che tutte le soluzioni dell'equazione sono esattamente della forma descritta sopra: sia infatti (t, z) *tale che* $5t + 11z = 13$, *allora, sottraendo l'equazione verificata dalla coppia* $(-26, 13)$ *si ha che* $5(t + 26) + 11(z - 13) = 0$.

Dunque 5 *divide* $z - 13$, *ovvero esiste* k *intero tale che* $z - 13 = 5k$, *sostituendo segue* $t + 26 + 11k = 0$ *cioè* $t = -26 - 11k$ *e così la soluzione* (t, z) *è esattamente della forma* $(-26 - 11k, 13 + 5k)$.

Esercizio 2.14: Gioco delle pile. Luca e Claudia si sfidano ad un gioco.
Su un tavolo sono presenti due pile di monete: la pila **A** contiene 2022 monete, la pila **B** ne contiene 512 e si hanno a disposizione le due seguenti mosse:

1. togliere almeno una moneta dalla pila **B**, eventualmente anche tutte;

2. togliere almeno una moneta dalla pila **A**, eventualmente anche tutte, e simultaneamente a questo, se la pila **A** rimanesse con meno monete della pila **B**, togliere un numero adeguato di monete dalla pila **B** per rendere le due pile uguali.

Si gioca a turno, perde chi fa l'ultima mossa, ad iniziare è Claudia.
Qual è il numero massimo di monete che può togliere Claudia alla prima mossa per assicurarsi la vittoria?
Se non esiste una strategia vincente rispondere '0000'.

`Soluzione:` *1509. Dimostriamo che Claudia vince se lascia sul tavolo una configurazione del tipo:* $n + 1$ *monete nella pila* ***A*** *ed* n *monete nella pila* ***B***.
Infatti in tal caso, se Luca toglie k *monete dalla pila* ***B***, *allora lo stesso farà Claudia*

dalla pila ***A*** *(riconducendosi esattamente alla configurazione di partenza, ma stavolta con* $n+1-k$ *e* $n-k$ *monete nelle rispettive pile), se Luca insiste con questa strategia si arriva alla configurazione in cui* ***A*** *contiene* 1 *moneta e* ***B*** *ne contiene 0, con Luca costretto ad effettuare l'ultima mossa (e perdere).*
Questo implica che Luca, per evitare la sconfitta, dovrà prima o poi utilizzare la mossa ***2****, tuttavia anche questa strategia lo porta necessariamente alla sconfitta: poiché stiamo analizzando il caso in cui la pila* ***A*** *contiene* $n+1$ *monete e la pila* ***B*** *ne contiene* n*, se Luca toglie* $k \geq 1$ *monete dalla pila* ***A****, allora egli dovrà rimuovere anche* $k-1$ *monete dalla pila* ***B*** *per come è definita la mossa* ***2*** *portando alla configurazione in cui entrambe le pile hanno lo stesso numero di monete. A questo punto Claudia toglierà una moneta dalla pila* ***B*** *ottenendo la configurazione del tipo* $n-k$ *monete sulla pila* ***A****,* $n-k-1$ *monete sulla pila* ***B****. Abbiamo riottenuto la situazione di partenza.*
Dunque esiste una strategia vincente: Claudia si assicura la vittoria se dopo la sua prima mossa ottiene una configurazione del tipo $n+1$ *monete sulla pila* ***A*** *e* n *monete sulla pila* ***B****. Per fare ciò può togliere* 1509 *monete dalla pila* ***A****, lasciandone così* 513 *sulla pila* ***A*** *e* 512 *sulla pila* ***B****.*
Resta da provare che questo è il massimo numero di monete che Claudia può togliere in una strategia vincente: se infatti ne togliesse almeno 1510*, allora Claudia dovrebbe necessariamente applicare la mossa* ***2*** *lasciando sul tavolo due pile uguali, ma allora a Luca basterebbe togliere una moneta dalla pila* ***B*** *per utilizzare la strategia vincente prima mostrata.*

Esercizio 2.15: Coppie polinomiali. Quante sono le coppie di interi (x, y) tali che
$$2y^2 + y - 2x + 4xy + 2 = 0\,?$$

`Soluzione:` *0002. Raccogliamo nel modo seguente:*

$$\begin{aligned} 0 = 2y^2 + y - 2x + 4xy + 2 &= 2x(2y-1) + 2y^2 + y + 2 \\ &= 2x(2y-1) + y(2y-1) + 2y - 1 + 3 \\ &= (2x+y+1)(2y-1) + 3. \end{aligned}$$

Segue che $(2x+y+1)(1-2y) = 3$ *e usando il fatto che* x, y *sono interi, si hanno quattro sistemi da risolvere:*
$$\begin{cases} 2x+y+1 = 1 \\ 1-2y = 3 \end{cases}$$
ha per soluzione $(x, y) = (1/2, -1)$ *che non è ammissibile;*
$$\begin{cases} 2x+y+1 = 3 \\ 1-2y = 1 \end{cases}$$
ha per soluzione $(x, y) = (1, 0)$ *che è ammissibile;*
$$\begin{cases} 2x+y+1 = -1 \\ 1-2y = -3 \end{cases}$$
ha per soluzione $(x, y) = (-2, 2)$ *che è ammissibile;*
$$\begin{cases} 2x+y+1 = -3 \\ 1-2y = -1 \end{cases}$$
ha per soluzione $(x, y) = (-5/2, 1)$ *che non è ammissibile.*

Esercizio 2.16: Il triangolo dell'anno. Un triangolo ha perimetro 2022. Sommando la lunghezza del primo lato al doppio della lunghezza del secondo e alla metà della lunghezza del terzo si ottiene ancora 2022. Infine si nota che la lunghezza del secondo lato supera di 10 la lunghezza del primo. Qual è la lunghezza del lato più corto?

`Soluzione:` *0000. Siano a, b, c le lunghezze dei lati del triangolo, impostiamo il sistema*

$$\begin{cases} a+b+c=2022 \\ a+2b+\frac{1}{2}c=2022 \\ b=a+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=2022 \\ 2b=c \\ a=b-10 \end{cases}$$

dove il secondo sistema segue dal primo confrontando le prime due equazioni. Sostituendo la seconda equazione nella prima e utilizzando $a = b-10$, si arriva all'equazione $4b = 2032$ e quindi alla soluzione $(a, b, c) = (498, 508, 1016)$. Tuttavia queste non possono essere le lunghezze dei lati di un triangolo in quanto $1016 > 498+508$. L'esercizio non ha soluzione.

Terzo allenamento

Esercizio 3.1: Piccolo mio. Trovare il più piccolo n intero positivo tale che $\sqrt{n(n+61)}$ è intero.

`Soluzione:` *0900. Sia k numero intero positivo, vogliamo risolvere $\sqrt{n(n+61)} = k$ con k diverso da 0 (altrimenti otteniamo le soluzioni $n = 0$ e $n = -61$ che non sono ammissibili).*

Elevando al quadrato si ha l'equazione $n^2 + 61n - k^2 = 0$ nell'incognita n. Questa ha soluzioni $n_\pm = \frac{-61\pm\sqrt{61^2+4k^2}}{2}$, affinchè siano intere imponiamo che la radice sia un quadrato perfetto, ovvero $61^2 + 4k^2 = h^2$ con h intero positivo.

Fattorizziamo come $61^2 = (h + 2k)(h - 2k)$, abbiamo già osservato che $k > 0$, quindi $h+2k > h-2k$ e dal momento che 61 è un numero primo, si deve avere che $h+2k = 61^2$ e $h - 2k = 1$. Sommando queste identità otteniamo $h = \frac{61^2+1}{2} = 1861$, da cui segue $n_- = \frac{-61-1861}{2} = -961$ e $n_+ = \frac{-61+1861}{2} = 900$, ma solo quest'ultima è positiva, quindi ammissibile.

Esercizio 3.2: Un triangolo scaleno. Un triangolo ha lati di lunghezza 5, 7, 10. La parallela al suo lato più corto passante per l'incentro incontra gli altri due lati nei punti X e Y. Quanto misura il segmento XY? Rispondere con la somma di numeratore e denominatore.

`Soluzione:` *0107. Siano AB il lato di lunghezza 5, I l'incentro del triangolo e F il punto di incontro del lato AB con la retta passante per i punti C e I. Indichiamo con X l'estremo del segmento che sta sul lato AC e Y l' estremo che apprtiene al lato BC.*

Per comodità, indichiamo la lunghezza di un segmento di estremi P, Q con PQ e non con la solita (e più appropriata) notazione $\overline{PQ}$.

Il triangolo XIC è simile al triangolo AFC da cui vale $XI = \frac{AF\cdot CI}{CF}$, analogamente YIC è simile a BFC da cui $YI = \frac{BF\cdot CI}{CF}$.

Osserviamo che $XY = XI + YI = (AF + BF)\cdot\frac{CI}{CF} = AB\cdot\frac{CI}{CF}$, il nostro obiettivo ora è determinare $\frac{CI}{CF}$.

Applichiamo il teorema della bisettrice al triangolo BFC, otteniamo $\frac{FI}{CI} = \frac{BF}{BC}$, ma $FI = CF - CI$, sostituendo si ottiene $\frac{CF-CI}{CI} = \frac{BF}{BC}$, da cui

$$\frac{CF}{CI} = 1 + \frac{BF}{BC} = \frac{BF+BC}{BC}.$$

Per determinare BF applichiamo ancora il teorema della bisettrice, stavolta al triangolo ABC, abbiamo $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}$, ovvero $BF = \frac{BC \cdot AF}{AC}$, ma $AF = AB - BF$ e sostituendo si ha

$$\begin{aligned} BF &= \frac{BC \cdot (AB - BF)}{AC} = \frac{BC \cdot AB}{AC} - \frac{BC \cdot BF}{AC} \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{BC}{AC}\right) BF = \frac{BC \cdot AB}{AC} \\ &\Rightarrow \left(\frac{AC + BC}{AC}\right) BF = \frac{BC \cdot AB}{AC} \\ &\Rightarrow BF = \frac{AB \cdot BC}{AC + BC}. \end{aligned}$$

Combinando le due relazioni che abbiamo ricavato segue

$$\frac{CF}{CI} = \frac{\frac{AB \cdot BC}{AC+BC} + BC}{BC} = \frac{AB}{AC + BC} + 1 = \frac{5}{17} + 1 = \frac{22}{17}.$$

In conclusione $XY = 5 \cdot \frac{17}{22} = \frac{85}{22}$.

Esercizio 3.3: Somma di comuni denominatori. Date

$$f(n) = \frac{2n+1}{n} \quad \text{e} \quad g(n) = \frac{n^3}{(n+1)^2}\,,$$

calcolare

$$\sum_{n=1}^{10} f(n) g(\tfrac{1}{n})\,.$$

Dare come risultato la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini

`Soluzione:` *0241. Osserviamo subito che vale*

$$g(1/n) = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1} = \frac{1}{n + 2n^2 + n^3} = \frac{1}{n(n+1)^2}$$

da cui

$$f(n)g(1/n) = \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Sommando per n che va da 1 a 10 otteniamo

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + ... + \left(\frac{1}{81} - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{121}\right),$$

quindi gli unici termini a sopravvivere dopo tante cancellazioni sono $1 - \frac{1}{11^2} = \frac{120}{121}$.

Esercizio 3.4: Una scacchiera senza cavalli. In una scacchiera 7×7 ci si trova nella casella $(1, 1)$ in basso a sinistra e si deve raggiungere la casella $(7, 7)$ in alto a destra. Potendosi spostare solamente in alto o a destra, quanti sono i percorsi che non passano per le caselle $(5, 3)$ e $(3, 5)$?

`Soluzione:` *0474. I possibili percorsi dal punto $(1, 1)$ al punto $(7, 7)$ sono tanti quanti gli anagrammi di una parola di 12 lettere composta da due caratteri (ad esempio possiamo pensare che il carattere 'D' descriva uno spostamento a destra e il carattere 'A' uno verso l'alto, in tal caso stiamo contanto gli anagrammi delle parole composte da 6 lettere 'D' e 6 lettere 'A') quindi sono $\binom{12}{6} = 924$.*

A questi vanno sottratti i percorsi che passano per le caselle vietate, tali percorsi sono di due tipi:

- *percorsi che partono da $(1, 1)$ e arrivano a $(7, 7)$ passando per $(3, 5)$,*
- *percorsi che partono da $(1, 1)$ e arrivano a $(7, 7)$ passando per $(5, 3)$.*

I primi percorsi vietati sono tutti e soli quelli che si ottengono concatenando un percorso da $(1, 1)$ a $(3, 5)$ con un percorso da $(3, 5)$ a $(7, 7)$, quindi conteremo innanzitutto i percorsi *che da $(1,1)$ portano a $(3,5)$ e poi moltiplicheremo questo numero per il numero di percorsi da $(3,5)$ a $(7,7)$.*

Esattamente come fatto per contare all'inizio i percorsi da $(1,1)$ a $(7,7)$, i percorsi da $(1,1)$ a $(3,5)$ sono tanti quanti gli anagrammi di una parola con 2 'D' (andiamo due volte a destra) e 4 'A' (andiamo quattro volte in alto), dunque sono $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$. Ora contiamo quelli che vanno da $(3,5)$ a $(7,7)$, sempre col medesimo ragionamento, questi sono $\binom{6}{2} = 15$. In totale dunque i percorsi vietati del primo tipo saranno $15 \cdot 15 = 225$.

Per contare i secondi ripetiamo il ragionamento: i secondi percorsi vietati sono tutti e soli quelli che si ottengono concatenando un percorso da $(1,1)$ a $(5,3)$ con un percorso da $(5,3)$ a $(7,7)$, quindi conteremo innanzitutto i percorsi che da $(1,1)$ portano a $(5,3)$ e poi moltiplicheremo questo numero per il numero di percorsi da $(5,3)$ a $(7,7)$.

I percorsi da $(1,1)$ a $(5,3)$ sono tanti quanti gli anagrammi di una parola con 4 'D' (andiamo quattro volte a destra) e 2 'A' (andiamo due volte in alto), dunque sono $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$. Ora contiamo quelli che vanno da $(5,3)$ a $(7,7)$: sempre col medesimo ragionamento, questi sono $\binom{6}{2} = 15$. In totale dunque i percorsi vietati del secondo tipo saranno $15 \cdot 15 = 225$.

Alternativamente avremmo potuto evitare il secondo conto dopo aver osservato che le caselle $(3,5)$ e $(5,3)$ sono simmetriche rispetto alla diagonale della scacchiera, pertanto avremmo contato lo stesso numero di percorsi vietati.

La soluzione sarà $924 - 225 - 225 = 474$.

Esercizio 3.5: Tre amici al bar. Una sera al bar dell'autogrill troviamo tre amici.
Alberto dice: *Bruno è un cavaliere.*;
Bruno dice *...tutti e tre cavalieri* (in quel momento passa un camion e non si capisce se Bruno ha detto *Siamo tutti...* o *Non siamo tutti...*);
Carlo dice: *Bruno ha detto che non siamo tutti e tre cavalieri.*
Quanti di loro sono cavalieri?

`Soluzione:` *0000. Se Bruno dice 'siamo tutti e tre cavalieri', allora Carlo mente e sia Carlo che Bruno sono dei furfanti, di conseguenza anche Alberto lo è.*

Supponiamo invece che Bruno dica 'non siamo tutti e tre cavalieri', allora Carlo è un cavaliere. Se ora Alberto è sincero, allora tutti gli amici risultano essere cavalieri, contraddicendo quanto detto da Bruno; se Alberto è un furfante, allora lo è anche Bruno, il quale però ha detto la verità, altra contraddizione.

Esercizio 3.6: Un parallelepido intero. Quanti valori interi può assumere il volume di un parallelepipedo di superficie totale uguale a 150?

`Soluzione:` *0125. Siano a,b,c le lunghezze dei lati del parallelepipedo. Per la disuguaglianza tra media armonica e geometrica si ha*

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq (abc)^{\frac{1}{3}},$$

dal momento che per ipotesi $2(ab+bc+ac) = 150$, questo significa che

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{\frac{bc+ac+ab}{abc}} = \frac{3abc}{ab+bc+ac} = \frac{3abc}{75} = \frac{abc}{25} \leq (abc)^{\frac{1}{3}},$$

da cui segue

$$abc \leq 25\,(abc)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow (abc)^{\frac{2}{3}} \leq 25 \Rightarrow abc \leq 25^{\frac{3}{2}} = 125.$$

In particolare il valore 125 è assunto dal cubo di lato 5, ovvero nel caso $a = b = c = 5$. Abbiamo così dimostrato che il nostro volume può valere al massimo 125.

Adesso proviamo che un parallelepipedo con superficie totale fissata (nel nostro caso uguale a 150), può assumere volume arbitrariamente piccolo (ma sempre strettamente positivo dovendosi trattare di un volume), in termini rigorosi vogliamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste un parallelepipedo di dimensioni a, b, c tali che $2(ab+bc+ac) = 150$ il cui volume vale $abc < \varepsilon$.

Per fare questo consideriamo parallelepipedi a base quadrata, ovvero supponiamo $a = b$. Dato il vincolo $2(ab + bc + ac) = 150$, ponendo $a = b$ otteniamo $a^2 + 2ac = 75$. Ora possiamo esprimere la dimensione c in funzione di a nel modo seguente:

$$a^2 + 2ac = 75 \Rightarrow c = \frac{75 - a^2}{2a}.$$

A questo punto, il volume del parallelepipedo a base quadrata e superficie totale uguale a 150 vale abc, dove $b = a$ e $c = \frac{75-a^2}{2a}$, ovvero:

$$Volume = a^2 \cdot \frac{75 - a^2}{2a} = \frac{a(75 - a^2)}{2}.$$

La funzione $f(a)$ che esprime il volume in dipendenza dalla dimensione a, è una funzione polinomiale e quindi è definita e continua per ogni $a \in \mathbb{R}$, tuttavia, per essere coerenti con l'interpretazione geometrica, supponiamo che sia definita per $a > 0$ (perchè la lunghezza di uno spigolo è sempre strettamente positiva) e fino ad $a = 5$.

Il dominio della nostra funzione sarà quindi l'intervallo $(0, 5]$, che a volte è indicato anche con la notazione $]0, 5]$, e qui $f(a)$ è continua. Si ha che

$$\lim_{a \to 0^+} f(a) = 0.$$

Questo prova che se prendiamo un parallelepipedo a base quadrata con lato a abbastnza piccolo, otterremo un parallelepipedo di volume arbitrariamente vicino a 0.

Infine notiamo che $f(5) = 125$; questa osservazione, unita al fatto che $\lim_{a \to 0^+} f(a) = 0$ e che f è continua, ci porta a concludere applicando il teorema dei valori intermedi*: la funzione $f(a)$ definita per $0 < a \leq 5$ assume tutti i possibili valori reali tra 0 escluso e 125 incluso, quindi in particolare assume tutti i valori interi da 1 a 125.*

Commento: ai fini della risoluzione avremmo potuto definire la funzione $f(a)$ su un qualunque intervallo del tipo $(0, M]$ con $M \geq 5$.

Da un lato è necessario che 5 appartenga al nostro dominio, se ad esempio scegliessimo di definire la funzione solo su $(0, 3]$, dedurremmo che $f(a)$ assume tutti i valori interi tra 0 e $f(3) = 99$, che è vero, ma non è la soluzione del problema in quanto perdiamo tutti i valori interi tra 100 e 125.

Dall'altro, se scegliessimo un intervallo di definizione molto grande contenente 5, ad esempio $(0, 1000]$, arriveremmo alla corretta risoluzione esattamenente come nel caso del dominio $(0, 5]$. Attenzione però, non otterremmo alcuna informazione utile dall'applicazione del teorema dei valori intermedi *agli estremi del dominio: dedurremmo infatti che in questo intervallo $f(a)$ assume tutti i valori tra 0 escluso e $f(1000) < 0$, quindi solo valori negativi che non possono corrispondere al volume del parallelepipedo.*

Quarto allenamento

Esercizio 4.1: Somma di quadrati. Quanto valgono le ultime 2 cifre di

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 199^2}{100}\ ?$$

`Soluzione:` *0067. Il numeratore della frazione è la somma dei quadrati dei numeri da 1 a 199. In generale vale*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sostituendo n = 199 otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1^2+2^2+3^2+...+199^2}{100} &= \frac{199\cdot 200\cdot 399}{600} = \frac{199\cdot 200\cdot 3\cdot 133}{200\cdot 3}\\ &= 199\cdot 133 = (100+99)\cdot(100+33)\\ &= 100\cdot(100+99+33)+99\cdot 33\,,\end{aligned}$$

le cui ultime due cifre sono le ultime due cifre di $99\cdot 33 = (100-1)\cdot 33 = 3300-33 = 3267$.

Esercizio 4.2: 2025 va bene, 0015 no. Quanti sono i numeri di 4 cifre che sono multipli di 3 e che hanno come ultima cifra 5?

`Soluzione:` *0300. Siano* a, b, c *le prime tre cifre della scrittura decimale di un numero a* 4 *cifre: prima scegliamo in modo qualsiasi* b *e* c*, per entrambe abbiamo tutte e* 10 *le cifre a disposizione, quindi possiamo scegliere in* $10\cdot 10 = 100$ *modi. Adesso, per far sì che il numero sia multiplo di* 3*, occorre scegliere la prima cifra* a *di modo che* $a+b+c+5 \equiv_3 0$*, ma allora la classe di resto modulo* 3 *di* a *è univocamente determinata dalla scelta di* b *e* c*, infatti, una volta fissate* b *e* c *in un modo qualsiasi dei* 100 *disponibili, avremo che*

$$a+b+c+5 \equiv_3 0 \iff a \equiv_3 -b-c-5 \equiv_3 -b-c+1\,.$$

Ora abbiamo 3 *casi, ovvero tanti quante sono le classi di resto modulo* 3*:*

- *se* $-b-c+1 \equiv_3 0$*, allora* $a \equiv_3 0$*, ovvero* $a \in \{3,6,9\}$*;*
- *se* $-b-c+1 \equiv_3 1$*, allora* $a \equiv_3 2$*, ovvero* $a \in \{1,4,7\}$*;*
- *se* $-b-c+1 \equiv_3 2$*, allora* $a \equiv_3 1$*, ovvero* $a \in \{2,5,8\}$*.*

In conclusione, per ciascuna scelta della coppia di cifre b, c*, affinchè il numero di scrittura decimale* $abc5$ *sia multiplo di* 3*,* a *deve appartenere ad una opportuna classe di resto modulo* 3*, ed all'interno di tale classe di resto abbiamo* 3 *modi di scegliere* a*, quindi la soluzione è* $3\cdot 100 = 300$*.*

Esercizio 4.3: Il polinomio bisbetico. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi non negativi tale che $p(0) = 33$, $p(1) = 40$ e $p(9) = 60000$. Quanto vale $p(6)$?

`Soluzione:` *8115. Vogliamo determinare esattamente il polinomio che soddisfa le ipotesi.*

Un generico polinomio di grado n *è della forma* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$*. Da* $p(0) = 33$*, segue subito che* a_0*=33 da cui* $p(x) = 33 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$*.*

Da $p(1) = 40$ *segue inoltre che* $33 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 40$*, ovvero* $a_1 + a_2 + ... + a_n = 7$ *e dal momento che per ipotesi* $a_1, a_2, ..., a_n$ *sono numeri naturali, si ha in particolare che* $a_i \leq 7$ *per ogni* $i = 1, ..., n$*.*

Ora $p(9) = 60000 \Rightarrow a_1 9 + a_2 9^2 + ... + a_n 9^n = 59967$ *e poichè abbiamo già osservato che i coefficienti* $a_1, a_2, ..., a_n$ *sono naturali e minori o uguali a* 7*, tali coefficienti sono esattamente quelli che compaiono nella scrittura in base* 9 *di* 59967*.*

Per calcolare queste cifre procediamo con l'algoritmo apposito. Scriviamo il numero 59967 *nella tabella in alto a sinistra e dividiamo più volte per* 9 *il numero sulla sinistra, scriviamo sotto il quoziente e a destra il resto della divisione*

$$\begin{array}{r|l} 59967 & 0 \\ 6663 & 3 \\ 740 & 2 \\ 82 & 1 \\ 9 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \uparrow \end{array}$$

troviamo quindi che il numero decimale 59967 *si scrive in base nove come* 101230_9 *(leggendo i resti dal basso verso l'alto). Possiamo infatti verificare che*

$$59967 = 0\cdot 1 + 3\cdot 9 + 2\cdot 9^2 + 1\cdot 9^3 + 0\cdot 9^4 + 1\cdot 9^5\,.$$

Troviamo i coefficienti cercati: $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 0, a_5 = 1$ *(il coefficiente* a_0 *non entrava in gioco ed era già stato determinato), quindi il polinomio iniziale è* $p(x) = 33 + 3x + 2x^2 + x^3 + x^5$ *e* $p(6) = 8115$.

Esercizio 4.4: La funzione prodottosa. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente positiva e tale che $f(x)f(y) = -f(xy) + f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Quanto vale $f(2022)$?

`Soluzione:` *0001. Verifichiamo facilmente che la funzione costante che assegna ad ogni* $x \in \mathbb{R}$ *il valore* 1 *soddisfa davvero l'uguaglianza data dal problema:*

$$1 \cdot 1 = f(x)f(y) = -f(xy) + f(x) + f(y) = -1 + 1 + 1\,.$$

Potrebbero esistere anche altre funzioni con la stessa proprietà (ed in questo caso la soluzione dell'esercizio sarebbe 9999 come da regolamento). Proveremo quindi ora che l'unica funzione con le proprietà richieste è la funzione tale che $f(x) = 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Scegliendo $y = 1$ *si ha*

$$f(x)f(1) = -f(x) + f(x) + f(1)\,, \quad \Rightarrow \quad f(x)f(1) = f(1)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. *Ora osserviamo che per ipotesi* $f(1) > 0$, *dunque possiamo dividere l'equazione per questo valore ottenendo che* $f(x) = 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

La soluzione del problema è quindi $f(2022) = 1$.

Esercizio 4.5: Il bar dell'A4. Alla fermata successiva, al secondo autogrill, abbiamo incontrato un gruppo di 4 persone che, interrogate sulla loro identità, hanno risposto:
A: *C'è almeno un furfante tra di noi.*
B: *Ci sono al massimo due cavalieri tra di noi.*
C: *Ci sono almeno tre furfanti tra di noi.*
D: *Non ci sono cavalieri tra di noi.*
Quanti cavalieri ci sono in questo insieme di 4 persone?

`Soluzione:` *0002. Certamente D è un furfante, segue subito che A è un cavaliere. Se C dice la verità, allora tutti gli altri sono dei furfanti, che è falso, dunque anche C è un furfante. Necessariamente deduciamo che anche B è un cavaliere.*

Esercizio 4.6: Parallelepipedi. I 12 spigoli di un parallelepipedo hanno misura intera e la loro somma è minore o uguale a 100. Qual è il massimo volume che può avere il parallelepipedo?

`Soluzione:` *0576. Siano* a, b, c *le misure dei lati del parallelepipedo. Troviamo che la somma degli spigoli del parallelepipedo è* $4(a + b + c) = 100$ *da cui* $a + b + c = 25$. *Dalla disuguaglianza tra media geometrica ed aritmetica si ha*

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{25}{3}$$

da cui segue

$$abc \leq \frac{5^6}{3^3} = \frac{15625}{27} = 578,7\ldots < 579.$$

Tenendo conto del fatto che le misure dei lati sono intere, osserviamo che $578 = 2 \cdot 17^2$ *e che non esiste un modo di distribuire i fattori primi* $2, 17, 17$ *ai valori di* a, b, c *con la condizione* $a+b+c \leq 25$. *Analogamente* 577 *è un numero primo, quindi l'unica possibilità sarebbe porre* $a = b = 1, c = 577$ *che non soddisfa le ipotesi. Infine notiamo che* $576 = 8 \cdot 8 \cdot 9$ *e ponendo* $a = b = 8$, $c = 9$ *si ha anche* $a + b + c = 25$.

Un ringraziamento agli allenatori Alice Baraz, Giuseppe Brusca e Federico D'Andrea, in particolare a Giuseppe che ha curato in larga parte la stesura di questo documento.